ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 31 MARS 1913.

PRÉSIDENCE DE M. F. GUYON.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les surfaces minima engendrées par un cercle variable.* Note de M. **Gaston Darboux.**

5. Les calculs que nous venons de faire dans ce cas particulier se compliqueraient beaucoup dans le cas général; nous avons donc choisi une autre méthode, que nous allons maintenant exposer.

Regardons dans les équations (5) A, B, C, a, b, c, R comme des fonctions connues d'un paramètre variable λ. Ces équations déterminent alors la surface la plus générale engendrée par un cercle, et les cosinus directeurs de la normale en un point à cette surface seront donnés par les formules (8) où H, K, Δ sont définis par les formules (7) et (9). Il faut exprimer que cette surface est minima.

Pour cela nous remarquerons qu'une des propriétés caractéristiques des surfaces minima est que l'expression

$$X\,dy - Y\,dx$$

soit une différentielle exacte. Pour exprimer cette propriété nous regarderons X, Y, Z comme des fonctions des variables *indépendantes* x, y, z, λ; et, en tenant compte des relations qui lient ces quantités, nous serons conduit à la condition très symétrique,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{K}{\Delta} - \frac{1}{K}\left(A\frac{\partial X}{\partial \lambda} + B\frac{\partial Y}{\partial \lambda} + C\frac{\partial Z}{\partial \lambda}\right) = 0,$$

qui devra être une conséquence des équations (5). En faisant le calcul, on trouve

$$(24) \quad -[2K + 2\Sigma A a'](H^2 + R^2 K^2) + 2KHRR' + R^2\left(H\frac{\partial K}{\partial \lambda} - K\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right) = 0.$$

C'est une relation qui est généralement du troisième ordre par rapport à x, y, z et qui doit être une conséquence des équations (5).

6. Commençons par considérer le cas où le plan du cercle est parallèle à une direction fixe. Alors on pourra supposer

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad c = \lambda, \quad c' = 1;$$

on aura

$$K + \Sigma A a' = 0, \quad K = -1,$$

et l'équation (24) se réduira à la suivante

$$2HR' - R'\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0,$$

ce qui donne

$$[2a'(x-a) + 2b'(y-b) + 2c'(z-c) + 2RR']R'$$
$$= R[a''(x-a) + b''(y-b) - a'^2 - b'^2 - 1 + RR'' + R'^2].$$

Cette relation devant avoir lieu en vertu des équations (5), dont la seconde se réduit à

$$z - \lambda = 0,$$

on peut y remplacer z par λ; et l'équation restante devra avoir lieu pour toutes les valeurs de x, y, ce qui permet de la décomposer dans les trois suivantes

$$2a'R' = Ra'', \quad 2b'R' = Rb'', \quad RR'' - R'^2 = 1 + a'^2 + b'^2.$$

L'intégration des deux premières nous donne

$$a' = pR^2, \quad b' = qR^2,$$

p et q désignant deux constantes. En portant ces valeurs de a', b' dans la troisième équation, il vient

$$RR'' - R'^2 = (p^2 + q^2)R^4 + 1.$$

Il suffit de multiplier les deux membres par $\frac{2R'}{R^3}$ pour avoir de part et d'autre

des différentielles intégrables. L'intégration donne

$$\left(\frac{R'}{R}\right)^2 = (p^2+q^2)R^2 - \frac{1}{R^2} + c,$$

c étant une constante arbitraire ; il vient alors

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = (p^2+q^2)R^4 + cR^2 - 1,$$

puis

$$a = p\int R^2\,dz + p_0, \qquad b = q\int R^2\,dz + q_0,$$

p_0 et q_0 désignant de nouvelles constantes.

Ces dernières formules montrent que la courbe lieu des centres (a, b) est dans un plan vertical. En prenant ce plan pour plan des xz, on annulera q et q_0. Ainsi on pourra, sans restreindre la généralité, prendre les formules

$$(25)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{dR}{dz}\right)^2 = p^2R^4 + cR^2 - 1, \\ a = p\displaystyle\int R^2\,dz, \qquad b = 0. \end{cases}$$

La première montre que R ne descendra pas au-dessous d'un certain minimum. Car on peut toujours mettre le polynome du quatrième degré en R sous la forme

$$(26)\qquad p^2R^4 + cR^2 - 1 = p^2(R^2 - R_0^2)(R^2 + R_1^2).$$

On aura toujours

$$pR_0R_1 = 1,$$

et il sera possible de poser, β étant une quantité réelle,

$$(27)\qquad R = R_0\,\mathrm{cn}\,\beta z.$$

Si l'on prend pour le module de la fonction elliptique la valeur

$$(28)\qquad k = \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + R_1^2}},$$

la première équation (25) nous donnera

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{1}{k'R_0},$$

ce qui permettra de prendre

$$(29)\qquad Z = k'R_0\beta. \quad \ldots$$

On aura ensuite

$$a = p \int R^2 dz = kR_0\beta + \frac{iR_0}{k} Z(i\beta),$$

de sorte que la surface sera déterminée par les équations

$$(30) \quad \begin{cases} x = \dfrac{k}{k'} z + \dfrac{iR_0}{k} Z\left(\dfrac{iz}{R_0 k'}\right) + R_0 \operatorname{cn} \dfrac{iz}{R_0 k'} \cos\psi, \\ y = R_0 \operatorname{cn} \dfrac{iz}{R_0 k'} \sin\psi, \end{cases}$$

qui ne diffèrent de celles que nous avons obtenues plus haut que par le changement de R en R_0.

7. Revenons à l'équation (24) et supposons maintenant que les plans des cercles n'aient pas une direction fixe. Nous allons montrer que, dans ce cas, cette relation ne saurait être une conséquence des équations (5).

Alors les dérivées A', B', C' ne pourront être nulles en même temps et K contiendra les coordonnées x, y, z au premier degré. Choisissons λ de telle manière qu'on ait

$$(31) \quad A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1.$$

On pourra constituer un système de 9 cosinus

$$\begin{matrix} A, & A', & BC' - CB', \\ B, & B', & CA' - AC', \\ C, & C', & AB' - BA', \end{matrix}$$

qui donneront lieu à des relations telles que les suivantes :

$$(32) \quad A + A'' = p(BC' - CB'), \qquad (BC' - CB')' = -pA',$$

et remplacer a', b', c' par les quantités ξ, η, ζ déterminées par les formules

$$(33) \quad \begin{cases} a' = \xi A + \eta A' + \zeta(BC' - CB'), \\ b' = \xi B + \eta B' + \zeta(CA' - AC'), \\ c' = \xi C + \eta C' + \zeta(AB' - BA'). \end{cases}$$

De là et des équations (32) on tirera les valeurs des dérivées secondes a'', b'', c'' :

$$(34) \quad \begin{cases} a'' = (\xi' - \eta)A + (\xi + \eta' - \zeta p)A' + (\zeta' + \eta p)(BC' - CB'), \\ b'' = (\xi' - \eta)B + \ldots, \\ c'' = (\xi' - \eta)C + \ldots. \end{cases}$$

Ces formules permettront de calculer H, $\frac{\partial H}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial K}{\partial \lambda}$. On a

$$H = -RR' - \eta(K+\xi) - \zeta \sum (BC' - CB')(x-a), \tag{35}$$

puis

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= -RR'' - R'^2 - (\xi + \eta' - \zeta p)(K+\xi) \\ &\quad - (\zeta' + \eta p) \sum (BC' - CB')(x-a) + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \\ \frac{\partial K}{\partial \lambda} &= -\xi' + p \sum (BC' - CB')(x-a) - \eta. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Supposons d'abord que ζ ne soit pas nul. Alors l'équation (35) nous donnera

$$\sum (BC' - CB')(x-a) = -\frac{1}{\zeta}(H + RR' + \eta K + \eta\xi). \tag{37}$$

Si l'on joint cette équation aux deux suivantes

$$\sum A(x-a) = 0, \qquad \sum A'(x-a) = K + \xi,$$

on voit qu'on pourra exprimer x, y, z en fonction de H et de K, et même que ces deux quantités ne seront pas indépendantes. Elles sont liées par la relation qu'on obtiendra en ajoutant les trois équations précédentes après avoir élevé leurs deux membres au carré. Cette relation sera la suivante :

$$-R^2 + (K+\xi)^2 + \frac{1}{\zeta^2}(RR' + \eta\xi + \eta K + H)^2 = 0. \tag{38}$$

D'autre part, si l'on porte la valeur (37) de $\sum (BC' - CB')(x-a)$ dans les relations (36), on obtiendra les expressions en H, K seulement de $\frac{\partial H}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial K}{\partial \lambda}$. Il viendra ainsi

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= -RR'' - R'^2 + (\zeta p - \eta')(K+\xi) - K\xi + \eta^2 + \zeta^2 \\ &\quad + \frac{\zeta' + \eta p}{\zeta}(H + RR' + \eta K + \eta\xi), \\ \frac{\partial K}{\partial \lambda} &= -\eta - \xi' - \frac{p}{\zeta}(H + RR' + \eta\xi + \eta K). \end{aligned}\right. \tag{39}$$

De cette manière, l'équation (24) devient une relation du troisième degré en H et K, relation qui doit être une conséquence de l'équation (38) et, comme celle-ci est indécomposable, il faut qu'on obtienne l'équation (24)

en multipliant l'équation (38) par un polynome du premier degré en H et K. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les termes du troisième degré dans l'équation (24), qui sont

$$K(H^2 + R^2K^2),$$

contiennent en facteur les termes du second degré dans l'équation (38) qui sont

$$K^2 + \frac{1}{\zeta^2}(H + \eta K)^2.$$

Il faut donc qu'on ait

$$\eta = 0, \qquad \zeta = R.$$

Alors il vient

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = -\xi' - \frac{p}{R}(H + RR'),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -RR'' + Rp(K + \xi) - K\xi + \frac{R'}{R}H + R^2.$$

L'équation (24) développée devient

$$-(2K + 2\xi)(H^2 + R^2K^2) + 2KHRR'$$
$$+ R^2\left[-H\xi' - \frac{p}{R}H^2 - pR'H + RR''K - Rp(K^2 + K\xi) + \xi K^2 - \frac{R'}{R}HK - R^2H\right] = 0.$$

Quant à l'équation (38) elle prend la forme

(40) $$-R^4 + (K + \xi)^2R^2 + (H + RR')^2 = 0.$$

Si on la multiplie par $(2K + 2\xi)$ et qu'on l'ajoute à la précédente, il viendra

$$(2K + 2\xi)[2HRR' + R^2R'^2 + 2K\xi R^2 + \xi^2R^2 - R^4] + 2KHRR'$$
$$+ R^2\left[-H\xi' - \frac{p}{R}H^2 - pR'H + RR''K - Rp(K^2 + K\xi) + \xi K^2 - \frac{R'}{R}HK - R^2K\right] = 0.$$

Cette équation, réduite au second degré, devra être identique à l'équation (40) et par suite ne pas contenir de terme en HK, ce qui donne la condition

$$RR' = 0.$$

En écrivant que les coefficients de H^2 et de K^2 sont dans le rapport de 1 à R^2, on aura encore

$$\xi R^2 = 0.$$

On peut écarter l'hypothèse $R^2 = 0$ et faire

$$\xi = R' = 0.$$

Il restera alors

$$-3KR^4 - RpH^2 - R^3pK^2 = 0.$$

L'équation (40) deviendra alors

$$H^2 + K^2R^2 = R^4.$$

Donc il faudrait que l'on eût

$$R^5p + 3KR^4 = 0,$$

ce qui entraîne l'équation impossible

$$R = 0.$$

Nous avons laissé de côté le cas où ζ serait nul et où, par conséquent, on aurait entre H et K la relation linéaire

$$H = -RR' - \eta(K + \xi).$$

En substituant cette valeur de H dans l'équation (24), on serait conduit à une équation dans laquelle les termes du troisième degré seraient $(\eta^2 + R^2)K^3$ et ne pourraient ni s'annuler, ni se réduire avec les autres. Cette hypothèse doit donc être écartée.

En résumé, la seule surface minima réelle engendrée par un cercle est la surface de Riemann.

Cette surface, nous l'avons vu, contient deux constantes dont on pourra disposer de manière à la faire passer par deux cercles quelconques situés dans des plans parallèles. Mais les équations qui détermineraient ces constantes se présentent sous une forme compliquée.

Si l'on adopte, par exemple, les formules (25), et si l'on suppose que le cercle minimum de la surface ne soit pas compris entre les deux cercles donnés, elles se présenteront sous la forme

$$z_0 = \int_{R'}^{R''} \frac{dR}{\sqrt{p^2R^4 + cR^2 - 1}}, \qquad x_0 = \int_{R'}^{R''} \frac{R^2\,dR}{\sqrt{p^2R^4 + cR^2 - 1}},$$

R', R'' désignant les rayons des deux cercles, z_0 la distance de leurs plans et x_0 la projection de la ligne qui joint leurs centres sur le plan de l'un des cercles. C'est à l'aide de ces équations transcendantes qu'il faudra déterminer les inconnues c et p^2.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe de transcendantes généralisant les fonctions elliptiques et les fonctions abéliennes.* Note de M. **Émile Picard**.

1. Dans deux Mémoires insérés dans les *Acta mathematica* (t. XXIII et XVIII), j'ai indiqué une classe étendue de transcendantes nouvelles satisfaisant à certaines équations fonctionnelles.

Soit donnée une transformation birationnelle

$$(T)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_1 = R_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{array}\right.$$

admettant le point double $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. On pourra, en général, écrire dans le voisinage de ce point

$$\begin{array}{l} X_1 = a_1 x_1 + Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = a_n x_n + Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{array}$$

les termes Q étant des développements de Mac-Laurin sans termes du premier degré.

Les transcendantes uniformes dont il s'agit, $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$, admettent une première période, soit $2\pi i$; relativement au changement de z en $z + \omega$ (ω étant une quantité que nous pouvons supposer réelle et positive), on a

$$\begin{array}{l} f_1(z+\omega) = R_1[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(z+\omega) = R_n[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)]. \end{array}$$

J'ai démontré l'existence de telles fonctions en procédant par approximations successives ([1]). Mon point de départ était le suivant. Soit tout d'abord dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$ une bande parallèle à l'axe Oy, limitée à gauche par l'axe des y et à droite par une parallèle AB à Oy, située à une distance ω de l'origine; on considère de plus une bande de largeur très petite (fixe d'ailleurs), comprenant Oy à son intérieur,

([1]) J'ai repris cette question dans mon Cours en avril 1911, en donnant les démonstrations dans tous leurs détails.

limitée à gauche par la parallèle i' à Oy et à droite par le parallèle i au même axe. Soit maintenant l'équation fonctionnelle

$$f(z+\omega)-a\,f(z)=P(z),$$

$P(z)$ étant une fonction méromorphe dans tout le plan, admettant la période $2\pi i$, et holomorphe dans la bande ii'. On démontre qu'on peut satisfaire à cette équation par une fonction $f(z)$, de période $2\pi i$, méromorphe dans tout le plan, et holomorphe dans la première bande (Oy, AB) et un peu au delà à droite et à gauche.

Ceci démontré, partons de fonctions doublement périodiques de seconde espèce

$$f_1^0(z),\quad f_2^0(z),\quad \ldots,\quad f_n^0(z),$$

aux multiplicateurs respectifs $(1, a_1)$, $(1, a_2)$, ..., $(1, a_n)$, et envisageons les approximations successives correspondant aux équations

$$(1)\quad \begin{cases} f_1^{(p)}(z+\omega)=a_1\,f_1^{(p)}(z)+Q_1[f_1^{(p-1)}(z), f_2^{(p-1)}(z), \ldots, f_n^{(p-1)}(z)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n^{(p)}(z+\omega)=a_n\,f_n^{(p)}(z)+Q_n[f_1^{(p-1)}(z), f_2^{(p-1)}(z), \ldots, f_n^{(p-1)}(z)]. \end{cases}$$

Bien entendu, les séries Q peuvent cesser d'être convergentes, mais leur signification n'en est pas moins déterminée.

On suppose que les fonctions initiales $f_1^0(z)$, ..., $f_n^0(z)$ n'aient pas de pôles dans la bande ii'. De plus, toutes les fonctions

$$(2)\quad f_1^{(p)}(z),\quad f_2^{(p)}(z),\quad \ldots,\quad f_n^{(p)}(z)$$

deviennent, quel que soit p, infinies respectivement dans la bande (Oy, AB), comme

$$(3)\quad f_1^0(z),\quad f_2^0(z),\quad \ldots,\quad f_n^0(z).$$

Ces conditions, jointes à la périodicité $2\pi i$, déterminent successivement, dans tout le plan, les termes de la suite (2), en s'appuyant sur le lemme préliminaire énoncé ci-dessus.

On démontre enfin que, *si les modules des termes de la suite* (3) *sont assez petits dans la bande* ii', *les termes de la suite* (2) *ont des limites parfaitement déterminées pour* $p=\infty$. Ce sont les transcendantes cherchées.

2. On pourrait, pour arriver au même résultat, procéder en faisant d'autres approximations successives. Par exemple, comme je l'avais fait dans mes premières recherches sur ce sujet, remplaçons x_1, x_2, ..., x_n par

$\mu x_1, \mu x_2, \ldots, \mu x_n$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ par $\mu X_1, \mu X_2, \ldots, \mu X_n$ (μ étant une constante) dans la transformation T du début. Nous pourrons, en prenant la transformation sous la seconde forme, écrire

$$(4)\qquad \begin{cases} X_1 = a_1 x_1 + P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = a_n x_n + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu). \end{cases}$$

On peut alors chercher à satisfaire aux équations fonctionnelles qui correspondent à (4), en prenant pour $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ des séries ordonnées suivant les puissances de μ, soit

$$(5)\qquad \begin{cases} f_1(z) = f_1^0(z) + \mu f_1^{(1)}(z) + \ldots + \mu^p f_1^{(p)}(z) + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(z) = f_n^0(z) + \mu f_n^{(1)}(z) + \ldots + \mu^p f_n^{(p)}(z) + \ldots. \end{cases}$$

On prend pour $f_1^0(z), \ldots, f_n^0(z)$ des fonctions arbitraires doublement périodiques de seconde espèce aux multiplicateurs $(1, a_1), \ldots, (1, a_n)$. Quant à

$$(6)\qquad f_1^{(p)}(z), \quad \ldots, \quad f_n^{(p)}(z) \qquad (P \geqq 1),$$

elles sont *holomorphes* dans la bande (Oy, AB).

Dans ces conditions, tous les coefficients des puissances de μ sont déterminés dans les développements (5), et l'on peut établir que, *si le module de μ est suffisamment petit*, les séries convergent et donnent, dans la première bande, les fonctions cherchées.

3. Si l'on n'assujettissait pas les fonctions de la suite (6) à être holomorphes dans la première bande (Oy, AB), on pourrait obtenir d'autres développements analogues à (5). Reprenons les formules du paragraphe précédent en nous bornant, pour simplifier l'écriture, au cas de deux équations. Soit

$$X = R(x, y),$$
$$Y = S(x, y)$$

la transformation birationnelle; en remplaçant x et y par μx et μy, puis X et Y par μX et μY, on obtient

$$X = ax + P(x, y, \mu),$$
$$Y = bx + Q(x, y, \mu).$$

En partant des développements

$$f(z) = f_0(z) + \mu f_1(z) + \mu^2 f_2(z) + \ldots,$$
$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \mu \varphi_1(z) + \mu^2 \varphi_2(z) + \ldots,$$

et substituant, il vient

$$f_0(z+\omega) = a f_0(z),$$
$$\varphi_0(z+\omega) = b \varphi_0(z),$$

et, d'une manière générale,

$$(7) \qquad \begin{cases} f_p(z+\omega) = a f_p(z) + P_p(f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}) \\ \varphi_p(z+\omega) = b \varphi_p(z) + Q_p(f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}) \end{cases} \qquad (P \geqq 1),$$

les P_p et Q_p étant des polynomes. Au lieu de procéder, comme au paragraphe précédent, pour obtenir les f_p et φ_p, c'est-à-dire les supposer holomorphes ($p \geqq 1$) dans la première bande (Oy, AB), on peut déterminer f_p et φ_p, en prenant pour elles des polynomes en

$$f_0, \quad \varphi_0, \quad \ldots, \quad f_{p-1}, \quad \varphi_{p-1},$$

qui sont complètement déterminés par les équations (7). On obtient alors pour $f(z)$ et $\varphi(z)$ des développements conduisant à des expressions définies pour toute valeur de μ, mais les fonctions uniformes $f(z)$ et $\varphi(z)$ ainsi obtenues ne sont pas méromorphes dans tout le plan de la variable z. Elles admettent *comme points singuliers essentiels* les pôles de f_0 et φ_0.

On peut d'ailleurs arriver par une autre voie aux fonctions précédentes. Supposons $|a| > 1$, $|b| > 1$, et envisageons les équations fonctionnelles

$$F(au, bv) = R[F(u, v), \Phi(u, v)],$$
$$\Phi(au, bv) = S[F(u, v), \Phi(u, v)].$$

Comme je l'ai montré [1], elles définissent des fonctions uniformes $F(u, v)$ et $\Phi(u, v)$ de u et v dans les plans des variables complexes u et v, holomorphes autour de $u = v = 0$, et ayant partout à distance finie le caractère de fonctions rationnelles. On voit alors qu'en posant

$$f(z) = F[f_0(z), \varphi_0(z)], \qquad \varphi(z) = \Phi[f_0(z), \varphi_0(z)],$$

on obtient des fonctions uniformes de z, satisfaisant à nos équations fonc-

(1) Voir *Comptes rendus*, 4 juillet 1904, et aussi la Note I dans le Tome II de ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, p. 465. Le cas de $a = b$ avait été envisagé à un autre point de vue par M. Poincaré (*Journal de Mathématiques*, 1890).

tionnelles primitives; elles ont comme points singuliers essentiels les pôles de $f_0(z)$ et de $\varphi_0(z)$.

4. J'ai essayé autrefois d'étendre les recherches ci-dessus, de manière à obtenir des fonctions de plusieurs variables, généralisant les fonctions abéliennes comme les fonctions du paragraphe 1 généralisent les fonctions elliptiques. Mais des difficultés nouvelles se présentent et je n'ai pas abouti. Il ne sera peut-être pas cependant sans intérêt d'indiquer ces difficultés en se bornant d'ailleurs à un cas très particulier. Soient ω et ω' deux constantes positives, et soient

$$X = R(x, y), \qquad X = R'(x, y),$$
$$Y = S(x, y), \qquad Y = S'(x, y)$$

deux substitutions birationnelles *permutables* du type considéré antérieurement avec le point double $x = y = 0$. Une question se pose naturellement. Existe-t-il des fonctions uniformes $f(z, z')$ et $\varphi(z, z')$ des deux variables complexes z et z', ayant partout à distance finie le caractère de fonctions rationnelles, admettant par rapport à z et à z' les périodes $2\pi i$, et telles que

$$(8)\quad \begin{cases} f(z+\omega, z') = R[f(z, z'), \varphi(z, z')], & f(z, z'+\omega') = R'[f(z, z'), \varphi(z, z')], \\ \varphi(z+\omega, z') = S[f(z, z'), \varphi(z, z')], & \varphi(z, z'+\omega') = S'[f(z, z'), \varphi(z, z')], \end{cases}$$

En suivant la même marche qu'au paragraphe 3, on est conduit à former le système d'équations

$$(9)\quad \begin{cases} f_0(z+\omega, z') = a f_0(z, z'), & f_p(z+\omega, z') = a f_p(z, z') + P_p[f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}], \\ \varphi_0(z+\omega, z') = b \varphi_0(z, z'), & \varphi_p(z+\omega, z') = b \varphi_p(z, z') + Q_p[f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}], \end{cases}$$

où $p \geqq 1$, et le système analogue pour la seconde substitution

$$(10)\quad \begin{cases} f_0(z, z'+\omega') = a' f_0(z, z'), & f_p(z, z'+\omega') = a' f_p(z, z') + P'_p[f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}], \\ \varphi_0(z, z'+\omega') = b' \varphi_0(z, z'), & \varphi_p(z, z'+\omega') = b' \varphi_p(z, z') + Q'_p[f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}]. \end{cases}$$

Considérons, dans les plans des deux variables complexes z et z', les premières bandes (Oy, AB) et $(Oy', A'B')$ relatives respectivement à ω et ω'. Pour appliquer l'analyse qui a réussi plus haut, il faudrait pouvoir satisfaire aux équations (9) et (10) par des fonctions de périodes $2\pi i$, f_p et φ_p, holomorphes quand z et z' sont respectivement dans la première bande de leur plan (p étant supérieur ou égal à *un*). Or, cela n'est pas pos-

sible, en général (¹), et l'on ne peut arriver par cette voie à prouver l'existence, *qui reste douteuse*, de fonctions périodiques uniformes ayant partout, à distance finie, le caractère de fonctions rationnelles, et satisfaisant aux équations fonctionnelles (8).

On pourrait, en opérant comme à la fin du paragraphe précédent, satisfaire aux équations (9) et (10) en prenant pour f_p et φ_p des polynomes en $f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}$; il ne reste plus alors d'arbitraire que f_0 et φ_0, pour lesquelles on prendrait des fonctions arbitraires quadruplement périodiques de seconde espèce. Mais on obtiendrait ainsi des fonctions uniformes de z et de z' *ayant des singularités essentielles à distance finie*. Ce second point de vue se rattache d'ailleurs indirectement à d'intéressantes remarques sur les transformations permutables faites récemment par M. Georges Giraud (²), et je ne veux pas y insister, lui laissant le soin de les développer.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'existence d'une viscosité superficielle, dans la mince couche de transition séparant un liquide d'un autre fluide contigu*. Note de M. **J. Boussinesq**.

I. Tous les physiciens savent qu'au contact soit de deux liquides, soit d'un liquide et d'un gaz, il existe une mince couche séparative, dite *superficielle*, autrement constituée suivant son épaisseur que suivant les directions parallèles à son plan tangent, couche qui ne saurait, par conséquent, être *fluide*, c'est-à-dire isotrope à l'état d'équilibre, comme l'est la matière voisine. En effet, toute particule fluide est caractérisée par la propriété de refaire sans cesse son *isotropie*, sa parité de constitution en tous sens, à mesure qu'on lui imprime du dehors des mouvements visibles la déformant. Car une imperceptible évolution des groupes moléculaires les uns autour des autres, causée par l'agitation calorifique (toujours notable aux températures suffisantes pour produire la fusion), y égalise plus ou moins vite les distances moléculaires moyennes autour de chaque point, à peu près, sans doute, comme se tasse rapidement une masse de sable, dans un vase soumis à des secousses multipliées.

(¹) Les deux transformations birationnelles et permutables envisagées sont générales, c'est-à-dire ne présentent aucune particularité en dehors des hypothèses explicitement faites.

(²) *Comptes rendus*, 20 janvier 1913.

Or il est clair que la même évolution aura lieu, dans la couche de transition séparant les deux fluides, autant que le comportera sa figure à deux dimensions sensibles, susceptible d'être confondue, en chaque endroit, avec celle d'un mince feuillet *plan*; et que, tout autour d'une normale au feuillet, elle y égalisera les distances moléculaires moyennes suivant les sens *tangentiels*, amenant ainsi et reconstituant sans cesse une isotropie non pas *absolue*, mais de *révolution* autour de la normale. Par suite, de même que l'isotropie complète, à l'intérieur de chaque particule fluide, y assure la normalité et l'égalité des pressions sur tous les éléments plans qui s'y croisent, de même aussi l'isotropie, autour de chaque normale, de la couche superficielle, avec symétrie de celle-ci de part et d'autre de la *coupe* qu'y fera tout plan très petit mené suivant la même normale, entraînera la perpendicularité, à ce plan, des deux *tensions* égales et opposées, f, exercées par unité de longueur sur les deux étroites faces de la coupe, ainsi que leur égalité pour les coupes normales orientées dans tous les azimuts. Donc, ces tensions normales et égales f, tangentes à la couche superficielle, ne dépendront que des deux variables (densité et température) définissant l'état physique dans le voisinage, à l'intérieur du liquide.

II. D'ailleurs, à température constante et aux pressions *modérées* où la densité ρ du liquide intérieur reste peu supérieure à ce qu'elle est dans le vide, les actions individuelles de molécule à molécule, les unes, répulsives, les autres, attractives, qui constituent la pression élastique sur tout élément plan intérieur, et qui y sont à peu près aussi nombreuses qu'à l'état solide où la densité se trouve du même ordre, ne doivent varier avec ρ que de très petites fractions de leurs valeurs dans le vide, à l'exception peut-être des répulsions exercées aux plus petites distances et très rapidement croissantes par de minimes rapprochements; en sorte que la pression élastique y est la somme algébrique, *relativement presque nulle*, d'énormes répulsions et d'énormes attractions, constituant séparément deux *très fortes sommes de signes contraires*.

Effectivement, la densité naturelle, dans le vide, du liquide (supposé non volatil, pour fixer les idées), se règle d'elle-même, abstraction faite du poids des particules, de manière à laisser en équilibre les éléments des feuillets superposés qui composent la couche superficielle libre, c'est-à-dire par la condition de donner, près de cette surface (censée peu courbe), une pression nulle sur tous les éléments plans qui lui sont parallèles et, par suite, nulle aussi, à l'intérieur, sur les éléments plans de toute orientation.

Sur les éléments plans menés dans la couche superficielle parallèlement à ses faces, la densité prend donc les valeurs ρ nécessaires pour y amener partout la neutralisation ou exacte (dans le vide), ou approchée (aux pressions ordinaires), des attractions et des répulsions exercées à travers ces éléments. Or on a ainsi autant d'équations que d'éléments plans parallèles à la surface, ou que d'*inconnues* ρ correspondantes; ce qui doit déterminer celles-ci. Dès lors, rien n'est disposé (ni ne reste disponible) dans les feuillets de la couche superficielle *libre* ou, de même, des autres couches analogues *de transition*, pour produire une neutralisation ou une quasi-neutralisation pareilles des attractions et des répulsions, à travers les *autres* éléments plans de ces couches, notamment à travers les coupes normales considérées ci-dessus, ou de part et d'autre desquelles il y a très sensiblement symétrie à la fois géométrique et physique des couches superficielles en question.

Ainsi s'expliquent les énormes valeurs, *par unité d'aire*, de la tension superficielle, qui est sensible, égale à f, sur l'unité de longueur d'une coupe, malgré sa largeur et sa surface extrêmement faibles.

III. Mais ce qui précède ne concerne, en toute rigueur, que les fluides parvenus, avec leurs couches de transition, à l'état *statique*, après cessation de toute déformation visible des particules. Or l'évolution interne qui y rétablit alors soit l'isotropie en tous sens, soit l'isotropie autour d'une normale, demande toujours pour se faire *un certain temps*, très court chez les fluides *peu visqueux*, plus long chez les autres. D'où il suit que, à l'état *dynamique*, c'est-à-dire quand chaque particule est soumise sans cesse, du dehors, à de nouvelles déformations visibles, sa configuration interne diffère de ce qu'elle serait, *sous sa figure apparente actuelle*, si l'isotropie s'y trouvait rétablie.

Bornons-nous au cas de fluides assez peu visqueux, ou soumis à des déformations visibles assez lentes, pour que l'évolution productrice de l'isotropie y soit, à tout instant, fort avancée. Alors les écarts existant entre la configuration interne réelle de chaque particule et sa configuration isotrope ou élastique pour ses densité et température effectives, sont, évidemment, d'autant plus faibles qu'elle est en train de se déformer avec plus de lenteur; et ils deviendraient négligeables, si *la vitesse* avec laquelle s'y font les déformations visibles s'annulait. Or, les actions moléculaires dépendant justement de la configuration réelle, c'est dire que des éléments plans, bien définis en situation dans une particule de l'*intérieur*, éprou-

veront, outre la *tension élastique* (pression changée de signe), $-p$, normale et égale sur tous les éléments plans se croisant en un même point, de petites composantes de pression, appelées maintenant *forces de viscosité*, fonctions des trois *vitesses de dilatation* et des trois *vitesses de glissement* (bien connues de tous les géomètres) qui définissent la rapidité actuelle de déformation de la particule.

IV. Les forces de viscosité pourront, dès lors, vu la lenteur admise de déformation, en être supposées très vraisemblablement fonctions linéaires et homogènes, ou comprendront, au plus, *six* termes, proportionnels respectivement aux *six vitesses élémentaires* mentionnées, mais avec coefficients réductibles à ceux que laissera subsister la parité de constitution en tous sens de la particule, dans l'état type, *élastique*, à partir duquel se comptent ces petits termes.

En considérant spécialement, dans la particule, les trois éléments plans *principaux*, rectangulaires, de part et d'autre desquels les vitesses actuelles de déformation se font symétriquement, celles-ci se réduiront, comme on sait, aux trois vitesses (*principales*) de dilatation D_1, D_2, D_3, qui exprimeront les rapidités de l'allongement relatif des lignes matérielles respectivement normales à ces éléments plans; et les *tractions* (par unité d'aire) sur les mêmes éléments plans, tractions, P_1, P_2, P_3, dès lors de mêmes sens, ou *normales*, dites aussi *forces* (ou *pressions*) *principales*, contiendront *deux* coefficients seulement *de viscosité*, que nous appellerons ε et ε'. Car il est visible que, dans P_1, par exemple, D_2 et D_3 auront rôle pareil ou seront affectés d'un même coefficient, ε'. Si donc on y appelle $2\varepsilon + \varepsilon'$ le coefficient de D_1, les *deux* vitesses, D_1, de dilatation *linéaire*, et $D_1 + D_2 + D_3$, de dilatation *cubique*, entreront seules dans P_1. Et l'on aura, pour exprimer, dans la particule, les *pressions principales*, dont on sait que dépendent toutes les composantes de pression, la formule triple, familière aux physiciens géomètres,

$$(P_1, P_2, P_3) = -p + \varepsilon'(D_1 + D_2 + D_3) + 2\varepsilon(D_1, D_2, D_3). \qquad (1)$$

V. Considérons maintenant, à ce point de vue de la viscosité, les couches de transition *d'un liquide*.

La condition de quasi-neutralisation des attractions et des répulsions qui s'exercent aux distances imperceptibles, à travers tout élément plan parallèle aux feuillets de ces couches, est imposée par des actions tellement grandes, qu'elle doit se réaliser même durant le mouvement; et, comme elle détermine la densité de chacun des feuillets, elle assure partout la

conservation des volumes, maintenant ainsi égale à zéro, pendant le mouvement, la somme algébrique des trois vitesses de dilatation, en chaque point, suivant trois axes rectangulaires quelconques, ou réduisant à *cinq* distinctes, même dans l'épaisseur des couches de transition, les *six* variables qui y définissent la vitesse de déformation. Ce seront, dès lors, pour toute particule des feuillets, les vitesses respectives de dilatation linéaire suivant *deux* directions rectangulaires quelconques *tangentes aux feuillets*, plus les *trois* vitesses de glissement, suivant ces directions et leur normale prises deux à deux.

D'ailleurs, nous n'avons à compter, dans les tensions superficielles à étudier ici, que les forces *extrêmement grandes par unité de surface*, les autres s'y trouvant insignifiantes sur les étroites *coupes*, d'aire presque infiniment petite, qui les supportent.

Cela posé, les deux seules vitesses élémentaires de déformation, d'une particule appartenant à un feuillet, qui ne soient pas symétriques par rapport au plan du feuillet, sont les deux vitesses de glissement relatives à la normale à ce plan, ou mesurant les rapidités avec lesquelles une file de molécules alignée suivant cette normale, s'incline par rapport aux deux files tangentes; et elles sont, par suite, les seules qui puissent amener soit, sur le feuillet, une composante *tangentielle* de pression suivant une droite du feuillet, soit, sur la coupe (du feuillet) perpendiculaire à cette droite, une composante *suivant la normale au feuillet*, composantes égales par unité d'aire, en vertu du théorème de *réciprocité des pressions*. Or de telles vitesses de glissement, ne changeant rien aux densités ρ ou n'empêchant pas la quasi-neutralisation des attractions et des répulsions entre feuillets, ne produiront, sur le feuillet considéré, que des actions de viscosité *modérées* et, dès lors, sur la coupe normale qu'on y a faite fictivement, que des actions *insignifiantes suivant la normale au feuillet*, comparativement à celles qui s'y exercent parallèlement à son plan.

Il suit de là que les *tensions superficielles* appliquées aux coupes normales d'un feuillet, seront toujours tangentes à celui-ci, ou *symétriques par rapport à son plan;* et qu'elles dépendront linéairement des seules vitesses élémentaires de déformation offrant pareille symétrie, ou même des seules qui se produisent dans ce plan, savoir, *les vitesses de dilatation des deux files rectangulaires de molécules du feuillet* et *leur vitesse de glissement mutuel*.

VI. Il y a donc lieu de faire abstraction des deux autres vitesses de glissement (relatives à la normale) dans l'appréciation des très fortes actions moléculaires qui ont à intervenir ici. Or on sait qu'à chaque instant, dans

tout élément superficiel de la couche, il existe, suivant chaque normale à la couche, deux certaines coupes rectangulaires, de part et d'autre desquelles l'extension ou la contraction des feuillets se font symétriquement dans le voisinage, et qui, par suite, supporteront deux tensions superficielles (par unité de longueur), $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, purement normales, ou *principales* aussi, et fonctions linéaires des deux seules vitesses de déformation *distinctes* subsistant alors. Ce sont, vu l'annulation du glissement correspondant, les vitesses respectives de dilatation ∂, ∂', dites également *principales*, des lignes matérielles de la couche, orientées suivant $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ et qui restent *momentanément* perpendiculaires l'une à l'autre. De plus, la parité de configuration, tout autour de la normale, de l'état type ou *élastique* de la couche à partir duquel se comptent les écarts de contexture produisant les forces de viscosité, entraîne l'égalité respective, dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, des coefficients de viscosité analogues.

Cela étant, appelons e_1, dans l'expression de $\mathcal{F}$, le coefficient de ∂', et $2\mathrm{e}+\mathrm{e}_1$ celui de ∂, de manière à avoir pour $\mathcal{F}$ la formule

$$f+\mathrm{e}_1(\partial+\partial')+2\mathrm{e}\partial.$$

Les deux tensions superficielles principales, *à l'état dynamique* et par unité de longueur, de la couche de transition, se trouveront dès lors exprimées par la formule double

$$(\mathcal{F},\mathcal{F}')=f+\mathrm{e}_1(\partial+\partial')+2\mathrm{e}(\partial,\partial'). \tag{2}$$

Il y aura donc deux coefficients e, e_1 de *viscosité superficielle*.

VII. Les physiciens n'ont guère fait porter, jusqu'ici, leurs observations précises de capillarité ou de tensions superficielles, que sur des phénomènes d'équilibre; et voilà sans doute pourquoi ils n'avaient pas eu, ce me semble, l'idée d'y introduire *des forces de viscosité*. Les considérations précédentes montrent que ces forces sont aussi naturelles dans l'étude de la couche superficielle d'un liquide, que dans l'hydrodynamique des fluides pris en masse.

Mon attention y a été appelée par les récentes expériences d'un jeune docteur ès sciences physiques de la Faculté des Sciences de Paris, M. Jules Roux, touchant la vitesse de chute de gouttes mercurielles, ayant moins de 1^{mm} de rayon, dans de l'huile de ricin très visqueuse (¹), et par la

(¹) *La charge de l'électron; recherches sur la loi de Stokes*, par M. Jules Roux; thèse pour le doctorat ès sciences physiques (Paris, Gauthier-Villars, 1912). Voir surtout le n° 15 (p. 25 et 26).

nécessité de mettre d'accord, avec les résultats de ces observations, une théorie ingénieuse, mais où l'action capillaire était négligée, donnée en 1911, à Cracovie, par M. Rybczynski et, à Paris, par notre confrère M. Hadamard. Il suffisait évidemment, en remarquant l'assez faible rayon des gouttes, d'avoir l'idée de mettre en œuvre la tension superficielle à la surface séparative du mercure et de l'huile, pour être conduit à la formule (2), dans un problème où les forces de viscosité ont le rôle principal.

BACTÉRIOLOGIE. — *Sur la vaccination contre le charbon symptomatique.* Note de MM. LECLAINCHE et VALLÉE.

Dans une série de publications antérieures, nous avons fait connaître plusieurs procédés d'obtention de vaccins contre le charbon symptomatique par la culture dans des bouillons de diverses compositions.

Nous nous étions arrêtés à l'emploi d'un milieu dit *bouillon F*, bouillon de foie peptoné, permettant un développement rapide et abondant de la bactérie. Nous montrions, en même temps, que la culture ainsi réalisée est susceptible de fournir des virus-vaccins, soit à la suite du chauffage, soit par le simple vieillissement à l'étuve, à 37°.

Ces vaccins n'ont pas servi seulement à des expériences de laboratoire : ils ont été largement employés dans la pratique au cours de campagnes de vaccination poursuivies de 1900 à 1910 et portant sur des dizaines de milliers d'animaux.

Cette large expérience montra que ces vaccins donnaient des résultats excellents; toutefois, leur emploi ne met pas complètement à l'abri des accidents résultant, soit d'une sensibilisation antérieure des organismes, soit des complications, bien connues dans leur mécanisme, résultant du traumatisme d'inoculation.

C'est qu'en fait les vaccins ainsi obtenus ne sont pas constitués par un virus atténué dans le sens précis de l'expression; les micro-organismes n'ont point été profondément modifiés dans leur virulence; l'altération produite par la chaleur ou par le vieillissement porte principalement sur les toxines dont nous avons établi déjà le rôle essentiel dans la pathogénie de l'infection.

Si le pourcentage total des accidents consécutifs à la vaccination est très faible, numériquement insignifiant, le fait qu'ils se produisent presque toujours en série, dans les mêmes étables, l'émotion qu'ils provoquent et le

discrédit qu'ils jettent sur l'intervention, expliquent l'intérêt considérable qui s'attache à leur prévention.

Ce but ne pouvait être atteint qu'en réalisant une véritable atténuation de la bactérie de Chauveau; en effet, l'introduction de bactéries sporulées non réellement atténuées dans les tissus, capables d'être retenues pendant un temps indéterminé dans des milieux offrant des degrés très variables de résistance, expose à une évolution virulente secondaire.

D'autre part, la présence habituelle de la spore dans les cultures et sa résistance énorme aux diverses influences modificatrices ont retardé jusqu'ici la solution du problème. Nous avons montré ainsi que les divers procédés d'obtention des vaccins par l'action des agents physiques, le chauffage à 100°, en particulier, ne modifient pas les propriétés virulentes en puissance dans la spore et que les bactéries issues de celles-ci possèdent une virulence normale.

Nous avons enfin réussi, après de multiples tentatives, à obtenir des *races vraiment atténuées* de la bactérie de Chauveau, en mettant parallèlement en jeu l'action d'une température dysgénésique et d'un milieu défavorable au développement des cultures.

Des bouillons de foie, peptonés, non additionnés de carbonate de chaux, destinés à saturer les acides qui se formeront au cours de la culture, et préalablement portés à la température de 45°, sont ensemencés à l'aide de sang virulent de cobaye. Une moitié des tubes est placée à l'étuve à 37°, l'autre au thermostat à 43°-44°. Le développement microbien est obtenu de tous les ensemencements.

Après 15 jours de séjour des cultures à l'étuve, leur virulence est éprouvée sur le cobaye. Les cultures obtenues à 37° sont virulentes pour cette espèce, celles développées à 43°-44° sont totalement dépourvues de pouvoir pathogène. L'examen de la morphologie des germes qu'on y rencontre témoigne de modifications profondes nées du mode de vie qui leur a été imposé; le type classique, en clostridium ou en bacilles, a fait place à des formes fines, longues, parfois flexueuses, asporulées, pauvres en substance chromatique et qui ne retiennent plus le Gram. Repiquées dans le vide, en bouillon Martin, avec ou sans addition de sérum, les semences atypiques atténuées donnent des cultures du type classique le plus parfait, ce qui élimine d'emblée toute idée d'impureté des souches hétéromorphes.

Non seulement les types du *Bacterium Chauvœi* ainsi cultivés se montrent avirulents pour le cobaye, mais ils le sont aussi pour le mouton et pour les bovins de tout âge dans les conditions les plus sévères de l'épreuve, c'est-à-dire en plein muscle. Nous avons inoculé de la sorte 22 bovins et 35 moutons sans qu'ils ressentent du fait de l'intervention le moindre dommage. Éprouvés ensuite à divers délais avec des virus de haute acti-

vité, ils ont résisté sans accident, tandis que les témoins succombaient tous.

Toutes les races de *B. Chauvœi* ne se prêtent point à l'atténuation et, parmi les nombreuses souches de ce microbe que nous possédons, quelques-unes seulement se sont prêtées à cette intervention. Mais nos échantillons atténués se sont, depuis 3 ans, montrés d'une fixité absolue et nous n'avons jusqu'ici enregistré aucun retour, même partiel, de leur virulence. Ils confèrent l'immunité par une seule insertion sous-cutanée en une région quelconque; ils peuvent, au même titre que les vaccins précédemment utilisés, être employés chez des animaux contaminés, après une injection de sérum immunisant, et dans les conditions que nous avons antérieurement précisées.

Toutefois, la valeur d'un procédé d'immunisation n'étant mesurée que par son utilisation dans la pratique, nous apportons les résultats de 3 années d'une large application de notre méthode.

De 1910 à 1913, 345844 animaux ont été vaccinés dans les conditions les plus diverses de l'entretien en France, en Allemagne, en Italie, en Espagne, en Algérie, dans la République Argentine. Les résultats ont été partout identiques. Il semble qu'on ne puisse désirer une méthode de vaccination plus simple, plus inoffensive et plus certaine dans ses résultats. Le problème de la vaccination contre le charbon symptomatique, dont nous poursuivons l'étude depuis 12 années, nous paraît aujourd'hui résolu.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** annonce le décès de M. *V. Dwelshauvers-Dery*, Correspondant de l'Académie pour la Section de Mécanique.

M. **Lebeuf**, élu Correspondant pour la Section d'Astronomie, adresse des remercîments à l'Académie.

M. **Wallerant** est adjoint à la Commission chargée d'examiner les Communications relatives à la baguette divinatoire.

M. **A. Claude** adresse des remercîments pour la distinction que l'Académie a accordée à ses travaux.

ASTRONOMIE. — *Observations d'occultations mutuelles des satellites de Jupiter.* Note de M. **M. Amann**, transmise par M. C. Wolf.

En dehors des immersions, passages, éclipses, etc., indiqués par les éphémérides astronomiques, les satellites de Jupiter présentent encore le phénomène bien plus rare de s'occulter mutuellement. Aussi il me semble utile de faire connaître celles de ces occultations que j'ai faites pendant les oppositions de Jupiter en 1902 et en 1908.

Les occultations de 1902 ont été observées au réfracteur de 108^{mm}, grossissement d'environ 100 fois, et celles de 1908 au réfracteur de 170^{mm}, grossissement 270 fois.

Le Tableau ci-dessous résume l'ensemble des observations; le sens du déplacement des satellites se déduit des configurations, d'après les conventions adoptées par la *Connaissance des Temps :*

Dates. 1902.	Satellites.	Durée de l'occultation.	Configurations.	Remarques.
		m s		
Septembre 10...	I-III	14. 0	○1··3	Occultation totale.
13...	I-III	6.25	○3··1	Id.
27...	II-III	9.14	○3··2	Id.
Octobre 7......	I-II	8.11	1··2○	Id.
9......	III-IV	3.45	○4.·3	Occultation partielle.
Novembre 2....	I-III	10. 0	○3··1	Occultation totale.
3....	III-IV	»	3·.4○	Simple contact.
10....	I-III	9.55	·3··1○	Occultation totale.
21....	I-II	»	2··1○	Observé le dernier contact seul.
Décembre 10...	I-II	10. 0	1··2○	Occultation totale durant laquelle le disque lumineux reste allongé dans le sens de l'équateur de Jupiter.
1908.				
Mars 14........	I-II	6.10	○2··1	Occultation totale.
Juin 2.........	II-III	»	·3.2○	Simple contact.

Le 14 mars 1908, le premier contact eut lieu à $8^h 48^m 47^s$, et le dernier à $8^h 54^m 57^s$, t. m. astr. de Paris.

Ces rapprochements de satellites permettent de faire d'intéressantes constatations. Ainsi, il se produit parfois des variations très notables dans la grandeur et l'éclat des satellites en conjonction. Le 2 juin 1908, par

exemple, lors d'un rapprochement du IIIe et du IIe, celui-ci, au commencement de l'observation, se présentait comme un tout petit point à côté du gros disque de l'autre; puis, à mesure qu'ils se rapprochaient, il s'établissait une plus grande égalité entre leurs dimensions apparentes.

D'autres fois, dans l'intervalle de 15 minutes, le satellite estimé le plus gros et le plus brillant devient plus petit et moins lumineux que l'autre, puis remonte au premier rang pour devenir encore une fois inférieur à son voisin. Ce n'est que quand les satellites sont de nouveau bien séparés, qu'on peut faire une évaluation définitive de leur grandeur et de leur éclat respectifs. Une observation semblable a également été faite par Dom Lamey le 26 octobre 1902.

De plus, le 2 et le 10 novembre 1902, après le dernier contact nettement constaté, les disques se ressoudèrent et restèrent ainsi collés l'un à l'autre pendant 4 à 6 minutes.

Enfin, le 21 novembre et le 10 décembre 1902, ainsi que le 14 mars 1908, les satellites en contact parurent entourés d'une enveloppe vaporeuse, alors que les autres satellites ne présentaient nullement cet aspect.

Dans les prochaines occultations, en 1914, il sera bon d'étudier attentivement, au voisinage des contacts, les variations d'éclat du satellite le plus éloigné; on pourra, il me semble, en tirer d'utiles renseignements sur l'existence d'une atmosphère propre à chaque satellite.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions fondamentales des équations différentielles linéaires du second ordre et sur le développement d'une fonction arbitraire. Application de la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables.* Note [1] de M. **Léon Lichtenstein**, présentée par M. Émile Picard.

Soit $p(x)$ une fonction continue positive, admettant les dérivées continues des deux premiers ordres.

Soient $q(x)$ et $k(x)$ des fonctions continues, λ un paramètre. Considérons l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+(q+\lambda k)y=0. \tag{1}$$

La détermination des valeurs exceptionnelles de λ telles que l'équa-

[1] Présentée dans la séance du 25 mars 1913.

tion (1) possède des solutions différentes de zéro satisfaisant aux conditions déterminées aux limites a fait, depuis l'apparition des Mémoires bien connus de Sturm et de Liouville, l'objet de nombreux travaux importants.

Citons en premier lieu le Mémoire célèbre de H. Poincaré *Sur les équations de la Physique mathématique* et les recherches classiques de M. Picard (*Comptes rendus*, 19 février 1894, et *Traité d'Analyse*, t. III, p. 114-128) reprises sous un point de vue un peu différent dans un Mémoire plus récent de *Rendiconti* (1906). En supposant $p = 1$ et posant de plus $q = 0$, $k > 0$, M. Picard démontra l'existence d'une suite infinie positive de valeurs λ_1, λ_2, ... du paramètre λ et d'une suite de fonctions fondamentales $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... correspondantes, telles que

$$y_i(0) = y_i(\pi) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Des travaux ultérieurs, citons ceux de M. Kneser (*Math. Annalen*, t. LVIII, p. 60-63), un Mémoire de M. Masson (*Trans. of the Amer. Mat. Society*, 1906), de nombreuses Notes de M. Stekloff, la Thèse de M. Haar (*Math. Annalen*, 1910) et la *Tesi d'abilitazione* de M. Picone (Pisa, 1909).

Dans ses recherches classiques sur les équations intégrales, M. Hilbert réduit l'étude de l'équation (1) à celle d'une équation intégrale du type polaire en supposant $q(x) < 0$ et la fonction $k(x)$ continue *n'ayant qu'un nombre fini de zéros*. Il démontre de plus que chaque fonction continue ayant les dérivées continues des quatre premiers ordres et satisfaisant aux conditions déterminées supplémentaires peut être développée en une série uniformément convergente suivant les fonctions fondamentales.

Posons $p(x) \equiv 1$, $q(x) \leqq 0$ (*ou même positive et suffisamment petite*), $k(x)$ continue et *absolument quelconque* et signalons le théorème fondamental suivant :

Il existe une suite infinie de valeurs exceptionnelles λ_1, λ_2, ... telles que pour $\lambda = \lambda_i$ l'équation (1) *possède une solution $y_i(x)$ continue avec ses dérivées de deux premiers ordres et satisfaisant à la relation* (2). *Les fonctions $y_i(x)$ vérifient les relations*

$$\int_0^\pi k(x)\, y_i(x)\, y_j(x)\, dx = 0 \qquad (i \neq j), \tag{3}$$
$$= \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \qquad (i = j).$$

Supposons pour abréger que $k(x)$ ne s'annule identiquement dans aucun intervalle situé dans $(0, \pi)$.

Chaque fonction susceptible d'être développée en une série trigonométrique $\sum_i f_i \sin ix$ *avec* $\sum i^2 f_i^2$ *convergente, ou, ce qui est la même chose, continue, possédant une dérivée à carré sommable et vérifiant les relations*

$$f(x) = \int_0^x \frac{df(x)}{dx}\,dx, \qquad f(0) = f(\pi) = 0,$$

peut être développée en une série uniformément convergente,

$$f(x) = \sum_i \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}\, y_i(x) \int_0^\pi k(z)\, f(z)\, y_i(z)\, dz. \tag{4}$$

Pour la démonstration j'ai recours à la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables créée par M. Hilbert.

Supposons dans ce qui suit, pour abréger, $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, et prenons pour point de départ l'équation

$$\int_0^\pi \left[\frac{dy}{dx}\frac{dv}{dx} - \lambda\, k(x)\, y(x)\, v(x)\right] dx = 0, \tag{5}$$

$v(x)$ désignant une fonction quelconque ayant les dérivées continues de deux premiers ordres et s'annulant pour $x = 0$ et $x = \pi$. Prolongeons les fonctions $k(x)$, $y(x)$ et $v(x)$ au delà de l'intervalle $(0, \pi)$ conformément aux équations

$$\begin{aligned} k(-x) &= k(x), & y(-x) &= -y(x), & v(-x) &= -v(x), \\ k(x+2\pi) &= k(x), & y(x+2\pi) &= y(x), & v(x+2\pi) &= v(x). \end{aligned}$$

Pour les limites de l'intégrale (5) on peut alors prendre les valeurs 0 et 2π. Posons

$$y(x) = \sum_i \frac{X_i}{i} \sin ix, \qquad v(x) = \sum_i \frac{Y_i}{i} \sin ix. \tag{6}$$

On trouve successivement :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dy}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx &= \sum_i X_i Y_i = (X, Y), \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(x)\, y(x)\, v(x)\, dx &= \frac{1}{\pi}\sum_{i,j} \frac{X_i Y_j}{ij} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is \sin js\, ds = K(X, Y), \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$(X, Y) - \lambda K(X, Y) = 0. \tag{8}$$

K (X, Y) est une forme bilinéaire symétrique totalement continue. De la théorie bien connue de M. Hilbert résulte presque immédiatement l'existence d'une infinité dénombrable de valeurs exceptionnelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ (en général positives et négatives). Dans le cas particulier où $k(x)$ ne s'annule identiquement dans aucun intervalle, la forme K(X, Y) est *fermée*. Alors il existe une infinité dénombrable de formes linéaires

$$L^\alpha(X) = l_1^\alpha X_1 + l_2^\alpha X_2 + \ldots \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

constituant une suite orthogonale normée et fermée. On a identiquement

$$(X, Y) = \sum_\alpha L^\alpha(X) L^\alpha(Y). \tag{10}$$

Soit

$$y_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2|\lambda_\alpha|}{\pi}} \sum_i \frac{l_i^\alpha}{i} \sin ix; \tag{11}$$

les $y_\alpha(x)$ sont les fonctions fondamentales appartenant à l'équation (1) et aux conditions aux limites (2). Posons

$$\sum_i \frac{X_i}{i} \sin ix = g(\xi, x), \qquad \sum_i \frac{Y_i}{i} \sin ix = f(x), \tag{12}$$

$g(\xi, x)$ désignant la fonction de Green de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ s'annulant pour $x = 0$ et $x = \pi$. De (10), (11) et (12) résulte facilement la relation cherchée (4).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un théorème de Laguerre.* Note de M. **Georges Pólya**, présentée par M. Émile Picard.

1. On doit à Laguerre (*Œuvres*, I, p. 28) le théorème suivant :

Soit l'intégrale réelle

$$f(x) = \int_0^\infty \varphi(\lambda) e^{-\lambda x} d\lambda,$$

convergente pour $x > x_0$, *et soit la fonction* $\varphi(\lambda)$ *telle qu'on puisse partager l'intervalle* $(0, \infty)$ *en* $V + 1$ *intervalles, de manière que :*

1° $\varphi(\lambda)$ *ne soit identiquement nul dans aucun des* $V + 1$ *intervalles;*
2° $\varphi(\lambda)$ *soit de même signe dans chacun séparément;*
3° $\varphi(\lambda)$ *soit de signe contraire dans deux intervalles voisins.*

Ces hypothèses remplies, la fonction $f(x)$ a au plus V racines supérieures à x_0.

La démonstration du théorème, donnée par Laguerre, ne me paraît pas suffisante [1], mais on peut le démontrer en toute rigueur par la méthode classique que Laguerre employait pour les séries (*Œuvres*, I, p. 3 et 144).

Le théorème est évident pour $V = 0$; nous le supposerons démontré pour $V = n - 1$. La fonction $\varphi(\lambda)$ ayant précisément $n + 1$ *intervalles de signe constant*, soit λ_0 l'extrémité commune des deux intervalles voisins de signe constant. Si la fonction $f(x)$ avait r racines supérieures à x_0, la fonction $f^*(x)$

$$f^*(x) = \frac{d}{dx} e^{\lambda_0 x} f(x) = e^{\lambda_0 x} \int_0^\infty (\lambda_0 - \lambda) e^{-\lambda x} \varphi(\lambda)\, d\lambda,$$

en aura *au moins* $r - 1$; c'est une conséquence simple du théorème de Rolle.

D'autre part, la fonction $(\lambda_0 - \lambda)\varphi(\lambda)$ a précisément $(n - 1) + 1$ intervalles de signe constant; le théorème étant supposé démontré pour $V = n - 1$, $f^*(x)$ a *au plus* $n - 1$ racines supérieures à x_0.

D'où l'on conclut

$$r - 1 \leqq n - 1 \qquad \text{ou} \qquad r \leqq n = V. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si la fonction $\varphi(\lambda)$ est continue, V est au plus égal au nombre des racines positives de $\varphi(\lambda)$. On tire des formules

$$\int_0^\lambda \varphi(\lambda)\, d\lambda = \Phi(\lambda), \qquad f(x) = x \int_0^\infty \Phi(\lambda) e^{-\lambda x}\, d\lambda$$

(dont la dernière est valable pour $x > x_0$, $x > 0$) la forme habituelle du théorème, donnée par Laguerre (*loc. cit.*).

En partant de ce théorème, on comblera aisément quelques lacunes que Laguerre a laissées dans les démonstrations de quelques autres théorèmes; mais je préfère donner des applications nouvelles.

---

[1] On a la proposition : « Si les fonctions réelles analytiques $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ convergent vers la fonction réelle analytique $f(x)$, uniformément dans un domaine qui comprend l'intervalle (a, b), et si, en commençant par un certain indice, toutes ces fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, ont *au moins* r racines dans l'intervalle (a, b), $f(x)$ y aura aussi *au moins* r racines. » Cette proposition deviendrait fausse si l'on disait *au plus* au lieu de *au moins* $\left(\text{on pose, par exemple, } f_n(x) = (x-1)^2 + \frac{1}{n^2}\right)$; or Laguerre semble supposer l'exactitude de cette proposition.

2. Je vais transformer la formule d'interpolation de Lagrange; $f(x)$ désignant un polynome réel de degré n, on a, pour $x > nh$,

$$\frac{n!\,f(x)}{\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\cdots\left(\frac{x}{h}-n\right)}=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\frac{f(\nu h)}{\frac{x}{h}-\nu}$$
$$=h\int_0^{\infty}\Psi(e^{-\lambda h})\,e^{-\lambda(x-nh)}\,d\lambda,$$

$\Psi(x)$ désignant le polynome de degré n suivant :

$$f(nh)-\binom{n}{1}f[n-1)h]x+\binom{n}{2}f[(n-2)h]x^2-\ldots+(-1)^n f(0)x^n.$$

Tout pareillement, pour $x > 0$, on a

$$\frac{(-1)^n n!\,f(-x)}{\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}+1\right)\cdots\left(\frac{x}{h}+n\right)}=h\int_0^{\infty}e^{-\lambda nh}\,\Psi(e^{\lambda h})\,e^{-\lambda x}\,d\lambda.$$

De ces formules on conclut : *Le nombre des racines de $f(x)$, supérieures à nh, est au plus égal au nombre des racines de $\Psi(x)$, comprises entre 0 et 1, et le nombre des racines négatives de $f(x)$ est au plus égal au nombre des racines de $\Psi(x)$, supérieures à 1. Si $f(0)$, $f(nh)$, $\Delta^n f(0)$ sont différentes de zéro, les nombres des racines correspondantes de $f(x)$ et de $\Psi(x)$ sont de même parité.*

De ce théorème découle une foule de règles pratiques, connues ou nouvelles, pour déterminer le nombre des racines réelles de $f(x)$, les valeurs de $n+1$ ordonnées équidistantes étant données. En particulier, on se servira d'une méthode de Laguerre (*Œuvres*, I, p. 16); $g(x)=\Sigma a_n x^n$ désignant un polynome, ou même une série de puissance réelle, et les nombres $A_n^{(k)}$ étant définis par les formules récurrentes

$$A_n^{(0)}=a_0+a_1+\ldots+a_n, \qquad \ldots, \qquad A_n^{(k)}=A_0^{(k-1)}+A_1^{(k-1)}+\ldots+A_n^{(k-1)},$$

on forme le Tableau infini à double entrée :

$$\text{(L)} \qquad \left|\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ A_0^{(0)} & A_1^{(0)} & A_2^{(0)} & A_3^{(0)} & \ldots \\ A_0^{(1)} & A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & A_3^{(1)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right|.$$

On trouve une limite supérieure pour le nombre des racines de $g(x)$, comprises entre 0 et 1, en comptant les variations dans les différentes

lignes du Tableau (L). La limite donnée par une ligne quelconque est au moins aussi bonne que celle donnée par la ligne précédente, et il y a une ligne qui donne la limite exacte ([1]). La deuxième ligne du Tableau (L), formée pour $\tilde{\Psi}(x)$ ou pour $x^n\Psi\left(\frac{1}{x}\right)$, donne une proposition de Laguerre (*OEuvres*, I, p. 157), et la première ligne du Tableau (L), formée pour

$$\Psi(1-x) = \Delta^n f(0) + \binom{n}{1}\Delta^{n-1} f(0)x + \ldots + f(0)x^n,$$

donne une proposition de Capelli et de M. Runge ([2]).

3. D'une formule connue de la théorie des séries de Facultés ([3]), on tire le théorème : *Le Tableau* (L) *étant formé avec les coefficients* $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ *de la série*

$$R(x) = \sum_0^\infty \frac{n!\,a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

les variations des différentes lignes donnent une limite supérieure pour le nombre des racines positives de $R(x)$.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur une série de surfaces dont une famille de lignes de courbure est constituée par des hélices indéformables.* Note ([4]) de M. Barré, présentée par M. Appell.

Soient

$$(1)\quad x = \int_0^s \cos\chi(s)\,ds, \quad y = \int_0^s \sin\chi(s)\,ds, \quad z = Ks \quad \text{(K, constante non nulle)},$$

les équations de l'hélice mobile génératrice; p, q, r les composantes de la rotation; u, v, w celles de la translation du trièdre de référence auquel elle

---

([1]) Sous certaines conditions, remplies toujours pour un polynome. (Fekete et Pólya, *R. d. C. M. di Palermo*, t. XXXIV, p. 89-120.)

([2]) Capelli, *Analisi algebrica*, Napoli 1909, p. 580-586. — Runge, *Praxis der Gleichungen*, Leipzig 1900, p. 105-108.

([3]) Nielsen, *Gammafunktion*, Leipzig 1906, p. 239-241.

([4]) Présentée dans la séance du 25 mars 1913.

est liée, et

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & L = u + q\mathrm{K}s - r\int_0^s \sin\chi(s)\,ds, \qquad M = v - p\mathrm{K}s + r\int_0^s \cos\chi(s)\,ds, \\ & \qquad\qquad N = w + \int_0^s (p\sin\chi - q\cos\chi)\,ds. \end{aligned} \right.$$

La méthode rappelée dans la Note insérée dans les *Comptes rendus* (13 mai 1912) nous conduit aux résultats suivants que je me borne à énoncer.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'hélice génératrice indéformable constitue une famille de lignes de courbure de la surface qu'elle engendre est que la relation

$$(3)\quad \begin{aligned} & [N - K(L\cos\chi + M\sin\chi)] \\ & \quad \times \{\chi'(KN + L\cos\chi + M\sin\chi) - (K^2+1)[r - K(p\cos\chi + q\sin\chi)]\} \\ & \qquad + (K^2+1)^2(p\sin\chi - q\cos\chi)(M\cos\chi - L\sin\chi) = 0 \end{aligned}$$

soit identiquement vérifiée. On est conduit à séparer d'abord le cas où le plan de base de l'hélice mobile conserve une direction fixe. Alors p et q sont nuls. Nous nous limiterons désormais dans cette Note à l'examen de ce cas.

Surfaces engendrées par une hélice indéformable de même direction d'axe et qui reste constamment une ligne de courbure de la surface qu'elle engendre. — I. En éloignant le cas des surfaces d'égale pente dont la génératrice rectiligne est une solution du problème qui nous occupe, l'équation (3) se réduit alors à la suivante :

$$(4)\qquad L\cos\chi + M\sin\chi + Kw - (K^2+1)\frac{r}{\chi'} = 0.$$

En éliminant w et M entre l'équation (4) et celles qu'on en déduit par deux dérivations par rapport à s, on trouve une relation équivalente aux deux équations à une seule variable :

$$(5)\qquad w = -\frac{a}{K}r \qquad (a \text{ const.});$$

$$(6)\qquad (K^2+1)\frac{\chi''}{\chi'^3} = K^2 s + a\chi.$$

La relation (6) définit la génératrice; l'équation (4) et celles qu'on en déduit, comme il a été dit ci-dessus, donnent u et v, et l'on trouve le résultat suivant :

Théorème. — *Les seules surfaces admettant une famille de lignes de courbure formée par des hélices indéformables de même direction d'axe sont des hélicoïdes* (admettant comme cas particulier, évident *a priori*, des sphères).

II. Passons maintenant à l'intégration de l'équation (6) :

1° Si $a = 0$, on trouve une surface de révolution qui ne peut être qu'une sphère, ce que montre une vérification directe. L'équation (6) s'intègre alors immédiatement une première fois et donne

$$(7) \qquad \rho = \frac{K}{(K^2+1)^{\frac{1}{2}}}(s_0^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}$$

(ρ rayon de courbure de la projection de l'hélice sur son plan de base, s_0 constante).

Cette équation intrinsèque est celle d'une épicycloïde. On voit sans peine qu'elle conduit pour l'hélice à des équations intrinsèques caractéristiques des hélices sphériques [cf. notre Mémoire : *Contribution à la théorie des hélices* (*Revue du Génie militaire*, 2e semestre 1910)]. Nous retrouvons ainsi en passant le résultat suivant :

La projection d'une hélice sphérique sur son plan de base est une épicycloïde.

2° Supposons maintenant $a \neq 0$. Posons alors

$$(8) \qquad \chi = \theta - \frac{K^2}{a}s,$$

l'équation en θ transformée de l'équation (6) s'intègre immédiatement une première fois et donne

$$(9) \quad (K^2+1)\left[\frac{1}{\theta'-\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{(\theta'-\alpha)^2}\right] + \frac{a}{2}\theta^2 + \frac{b}{2} = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{K^2}{a},\ b \text{ const. arbit.}\right).$$

De cette équation on tire

$$(10) \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\alpha\varepsilon R}{-(K^2+1)+\varepsilon R}\left[\varepsilon = \pm 1,\ R = \sqrt{(K^2+1)^2 - \alpha(K^2+1)(a\theta^2+b)}\right],$$

d'où, par des transformations dont nous ne donnerons pas le détail et en

remplaçant b par une autre constante arbitraire m [1], non nulle,

$$
(11)\quad
\begin{cases}
x = \dfrac{am}{K(K^2+1)^{\frac{1}{2}}} \displaystyle\int_0^{\chi} \cos\chi \cos\left[\frac{K}{(K^2+1)^{\frac{1}{2}}}\chi\right] d\chi - \dfrac{a}{K^2}\sin\chi \\
\quad = x_1 - \dfrac{a}{K^2}\sin\chi, \\
y = \dfrac{am}{K(K^2+1)^{\frac{1}{2}}} \displaystyle\int_0^{\chi} \sin\chi \cos\left[\frac{K\chi}{(K^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right] d\chi + \dfrac{a}{K^2}(\cos\chi - 1) \\
\quad = y_1 + \dfrac{a}{K^2}(\cos\chi - 1), \\
z = \dfrac{a}{K}\left[m \sin \dfrac{K\chi}{(K^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \chi\right], \\
s = \dfrac{a}{K^2}\left[m \sin \dfrac{K}{(K^2+1)^{\frac{1}{2}}}\chi - \chi\right].
\end{cases}
$$

Les intégrales qui figurent dans ces formules sont exprimables sans difficulté par les fonctions trigonométriques ; nous ne nous y arrêterons pas et nous nous bornerons à tirer des formules (11) le résultat suivant :

La projection de la génératrice sur son plan de base est une courbe parallèle à une épicycloïde; cette projection est algébrique, lorsque $\dfrac{K}{(K^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ est commensurable. Cette proposition se déduit immédiatement de la considération de l'équation intrinsèque de la courbe dont les coordonnées sont les fonctions x_1 et y_1 définies par les équations (11).

L'étude complète du mouvement hélicoïdal correspondant se ferait sans difficulté par la méthode développée dans le Mémoire précité en partant des relations

$$u = r\left[a + \frac{(K^2+1)}{\chi'(0)}\right], \qquad v = 0, \qquad w = -\frac{ar}{K}.$$

---

(1) $m^2 = \dfrac{K^2+1}{K^2} - \dfrac{b}{a}$. La supposition $m = 0$ donnerait une hélice circulaire associée à un mouvement qui ne ferait que la déplacer sur elle-même.

HYDRODYNAMIQUE EXPÉRIMENTALE. — *Sur la zone de formation des tourbillons alternés derrière un obstacle.* Note de M. **Henri Bénard**, présentée par M. P. Appell.

J'ai montré pour la première fois, en 1908, qu'il se forme deux files parallèles de centres de giration équidistants et alternés à la surface d'un liquide fendu par un obstacle prismatique vertical dont la vitesse est uniforme et parallèle à son plan de symétrie. Dans deux Notes présentées à l'Académie (¹) j'ai décrit la méthode optique et cinématographique employée et indiqué les lois expérimentales de cette périodicité.

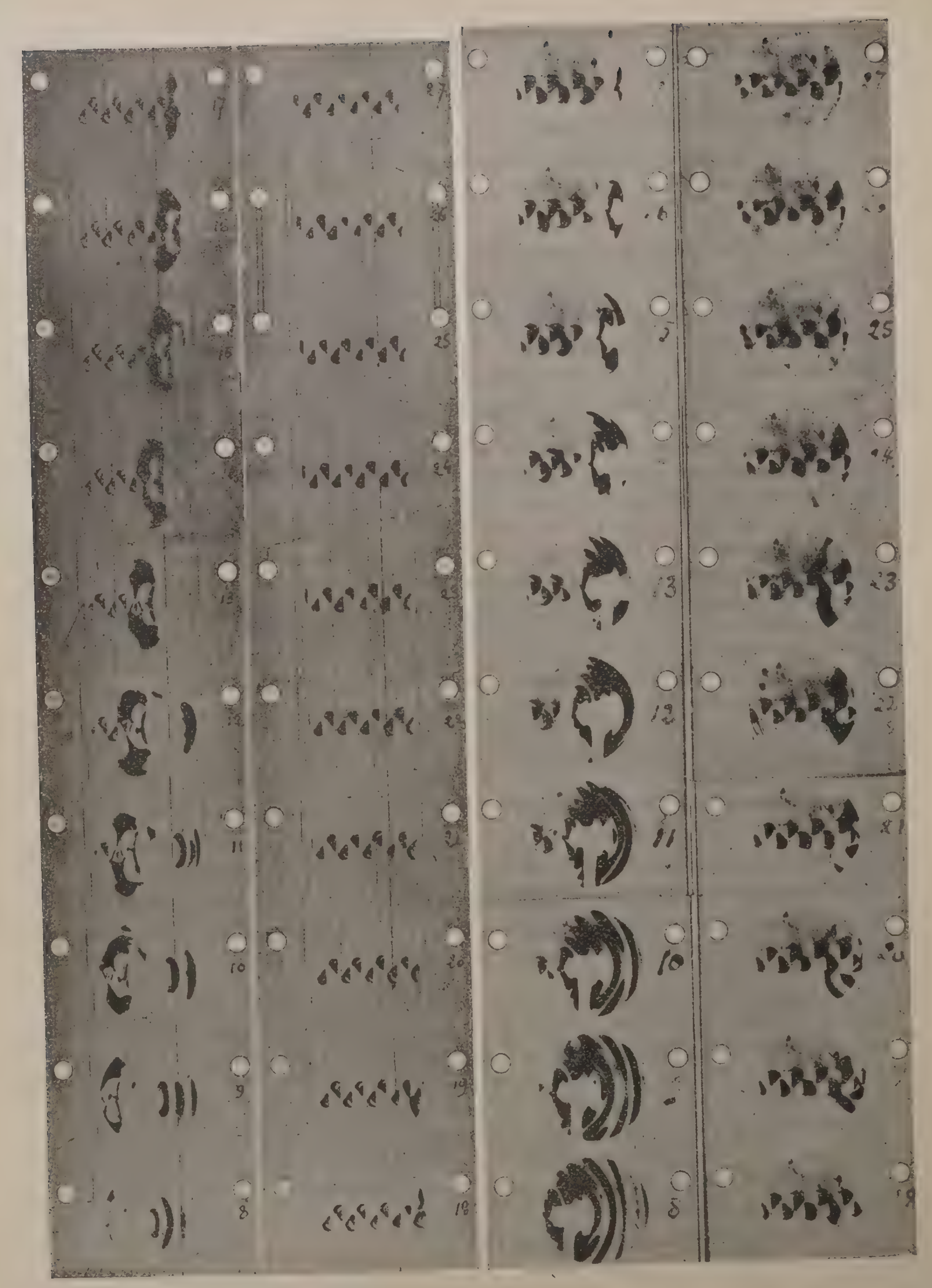
Depuis lors, plusieurs physiciens ont retrouvé le phénomène dans les liquides ou dans l'air, avec des formes de l'obstacle d'ailleurs moins particulières; la stabilité de ce système de tourbillons en échiquier a été aussi l'objet de recherches théoriques. J'ai poursuivi, de mon côté, à l'aide d'un microscope micrométrique à platine *ad hoc*, le dépouillement de mes films de Lyon (1908-1910). Le dispositif optique a subi un perfectionnement, grâce auquel chacune des cuvettes concaves de la surface libre donne par réfraction une petite image d'un segment de cercle lumineux, situé à l'infini dans la direction verticale, et limité par une corde perpendiculaire à la direction de translation de l'obstacle. Cette corde fournit ainsi des repères rectilignes parfaitement nets, qui, pointés à 5^{μ} près sur le film, indiquent à $0^{mm},02$ près, en vraie grandeur, l'emplacement de chacun des tourbillons, à l'époque, exactement connue, où chaque image a été impressionnée. De plus, les déformations de ces petits segments de cercle renseignent sur la forme des dépressions qui les ont fournis.

La méthode ne donne pas les filets liquides, mais seulement le relief de la surface libre. J'en décrirai les traits généraux, les aspects variant naturellement beaucoup suivant la vitesse et la forme de l'obstacle, et la viscosité du liquide. On peut suivre cette description sur les deux films reproduits (en négatif), qui ne diffèrent que par le sens de la lumière, venue de l'avant pour le n° 261 et de l'arrière pour le n° 259.

Le liquide est de l'eau sucrée ($c = 20^{g},3$ pour 100^{cm^3}), à $+17°,2$. L'obstacle (n° 22), long de $1^{cm},96$, large de $0^{cm},20$, immergé sur une hauteur de 6^{cm}, est limité à la proue par un dièdre de 22°, et à la poupe par un plan vertical; sa vitesse est $17^{cm},43$ par seconde pour le film 261, et $17^{cm},16$ par seconde pour le film 259.

Près de l'obstacle, la surface libre, déprimée, forme une sorte d'*arène* à fond presque plat; la partie antérieure, symétrique et indéformable, est limitée par le

(¹) 9 et 23 novembre 1908. Sur la figure, une erreur dans le dessin a inversé le sens de rotation des tourbillons de la file de gauche.



Film n° 261 (images 8 à 27). Film n° 259 (images 8 à 27).

bourrelet et les rides capillaires qui précèdent la proue, et latéralement par des *gradins* courbes, en amphithéâtre, descendant tous vers la poupe (donc invisibles sur le film 261). Le fond de cette arène, derrière la poupe, est occupé par deux dépressions jumelles, ovalisées, très plates vers l'arrière, à courbures plus accentuées contre la poupe, séparées l'une de l'autre par une courte crête médiane, qui participe déjà aux vibrations de la zone vibrante. Enfin, à l'arrière, cette arène est limitée brusquement par un haut *seuil* abrupt (donc invisible sur le film 259), séparé en deux tronçons symétriques, qui forment l'un avec l'autre un angle obtus, ouvert en arrière, mais ne se raccordent pas.

C'est cette brèche médiane, dissymétrique, séparant les deux tronçons du seuil post-poupe, qui constitue toujours la zone vibrante, où se forment les tourbillons alternés; à deux instants séparés par une demi-période, les aspects de cette zone sont exactement symétriques l'un de l'autre par rapport au plan de symétrie de l'obstacle. Chacun des deux tronçons du seuil, à tour de rôle, se bifurque pour loger entre les deux branches de la fourche la cuvette concave d'un tourbillon nouveau, alternativement dextrogyre ou sénestrogyre. On voit, sur le film 261, que l'intervalle écoulé entre deux images consécutives est, à très peu près, d'une demi-période.

Aux faibles vitesses (cas de la figure), les deux tronçons du seuil se recourbent latéralement vers l'avant, de façon à se raccorder aux gradins courbes et à fermer l'arène, dont le contour a la forme d'un rein. Aux vitesses plus grandes, les deux tronçons, sensiblement rectilignes, du seuil ne rejoignent plus les gradins dans le champ photographié, mais leur deviennent parallèles, et divergent, en formant l'arrière du sillage, que les branches divergentes du bourrelet ante-proue limitent d'autre part.

PHYSIQUE. — *Sur l'entraînement du support dans les observations du pendule.* Note de M. **Ernest Esclangon**, présentée par M. P. Appell.

Longtemps négligé dans les observations du pendule, l'entraînement du support conduit à des corrections importantes, couramment de l'ordre de $0^s,0000050$, dix fois supérieures aux erreurs d'observation.

Peirce et Cellerier ont donné, pour la correction à effectuer de ce fait sur la durée d'oscillation observée, la formule

$$(1) \qquad dT = -\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\,\frac{1}{k}\,\frac{Mgh}{2\lambda^2};$$

M est la masse du pendule, λ la longueur du pendule simple synchrone, h la distance du centre de gravité à l'axe de suspension, k le *coefficient statique* de flexion, c'est-à-dire le rapport (constant dans les limites d'application) entre une force horizontale connue F appliquée au support (au niveau du point de suspension), et le déplacement correspondant et très petit p; *k est un nombre très grand.*

Plantamour a distingué deux coefficients de flexion : le coefficient k qu'on vient de définir et le *coefficient dynamique* donné par l'expérience dynamique qui consiste à

mesurer les déplacements du support pendant les oscillations mêmes, sous l'effort, facile à calculer, du pendule en mouvement. L'expérience montre une différence très notable entre la valeur de ces deux coefficients, et l'on a longtemps hésité pour savoir lequel devait figurer dans la formule de correction.

Defforges étudiant *expérimentalement* le problème, en évaluant directement la correction avec divers pendules et des élasticités variant dans le rapport de 1 à 80, a montré que c'est le coefficient statique k qui doit entrer dans la formule (1).

Peirce et Cellerier n'ont introduit dans le calcul de cette formule ni la masse du support, ni la phase possible des deux mouvements oscillatoires, supposant que le support obéit instantanément, sans retard et sans période propre d'oscillation, à l'effort du pendule en mouvement.

Je me propose d'établir dans cette Note : d'une part que c'est effectivement le coefficient statique k qui doit entrer dans la formule (1), d'autre part que *la correction ne dépend ni de la masse du support ni du frottement intérieur* qui tend à amortir ses oscillations.

En effet, désignons par p le déplacement du support au niveau de la suspension, par q le *glissement* du pendule [1] sur son support, de sorte que $p+q$ représente à l'instant t l'abscisse du point de suspension. Soit Φ la réaction normale (positive vers le haut), F la réaction tangentielle, appliquées au pendule, N le couple de frottement de roulement, M la masse du pendule. Les théorèmes de la Mécanique donnent immédiatement, en négligeant les cubes des amplitudes du mouvement oscillatoire du pendule,

$$(2) \qquad h\theta'' + p'' + q'' = \frac{F}{M},$$

$$(3) \qquad h(\theta\theta'' + \theta'^2) = \frac{\Phi}{M} - g,$$

$$(4) \qquad \lambda\theta'' + g\theta + p'' + q'' = N$$

et, pour le mouvement du support,

$$(5) \qquad \mu p'' + k_1 p' + kp + F = 0.$$

où k est le coefficient statique, k_1 un coefficient correspondant au frottement moléculaire, μ un coefficient correspondant à l'inertie ou masse de support (μ, k, k_1, positifs).

Si l'on étudie expérimentalement le mouvement du support, libéré du pendule, on constate qu'écarté de sa position d'équilibre, il revient au repos dans un temps inappréciable, ce qui conduit à admettre que k et k_1 sont très

(1) Les quantités p et q sont toujours très petites, à peine des fractions de micron.

grands par rapport à μ, k étant d'ailleurs habituellement grand par rapport à k_1; enfin μ est lui-même très grand par rapport à la masse M du pendule.

On peut d'abord négliger le frottement de roulement qui agit seulement sur l'amplitude sans altérer la durée d'oscillation. L'expérience montre en outre que le glissement q est sensiblement proportionnel à θ (¹) et que l'on peut poser $q = n\theta$ (n très petit). On tire alors des équations précédentes

$$\mathrm{M}(h+n)\theta'' + (\mathrm{M}+\mu)p'' + k_1 p' + kp = 0,$$
$$(\lambda+n)\theta'' + g\theta + p'' = 0.$$

L'équation caractéristique de ce système d'équations différentielles

$$\frac{\mathrm{M}(h+n)r^2}{(\lambda+n)r^2+g} = \frac{(\mathrm{M}+\mu)r^2 + k_1 r + k}{r^2}$$

admet toujours deux racines imaginaires, $-\rho \pm \omega i$, voisines de $\pm i\sqrt{\frac{g}{\lambda}}$, et l'on a, en négligeant les termes en n^2, $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{n}{k}$,

$$\rho = +\frac{1}{k}\left(\frac{k_1}{k}\right)\frac{\mathrm{M}g^2 h}{2\lambda^3}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}\left(1 - \frac{n}{2\lambda} - \frac{1}{k}\,\frac{\mathrm{M}gh}{2\lambda^2}\right).$$

Les deux autres racines peuvent être réelles ou imaginaires, mais dans tous les cas *leurs parties réelles* sont toujours des *nombres négatifs très grands*. Il en résulte que, dans l'expression de θ en fonction de t, les composantes correspondantes sont rapidement amorties, θ se réduisant sensiblement, au bout d'un temps très court, à la seule composante

$$\theta = ae^{-\rho t}\cos(\omega t + \alpha).$$

La durée d'oscillation devient donc égale à

$$\mathrm{T} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\left(1 + \frac{n}{2\lambda} + \frac{1}{k}\,\frac{\mathrm{M}gh}{2\lambda^2}\right).$$

(¹) Sans doute que dans la réalité le glissement se fait d'une manière un peu moins simple et probablement discontinue; toutefois un examen plus approfondi montre que cette circonstance ne modifie en rien la nature des conclusions relatives à la correction d'entraînement du support.

Les inconnues sont en nombre supérieur d'une unité à celui des équations, mais les lois habituelles du frottement de glissement sont d'une application douteuse dans ce glissement microscopique, sous la dépendance des phénomènes intimes d'élasticité qui se passent au contact du pendule avec son support; aussi sa détermination expérimentale, même approximative, constitue-t-elle la méthode la plus sûre pour éliminer la variable q qui figure en quelque sorte en trop dans les équations.

La quantité $-\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\frac{n}{2\lambda}$ représente la *correction de glissement ;* la quantité $-\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\frac{1}{k}\frac{Mgh}{2\lambda^2}$ la *correction d'entraînement* du support, celle-ci dépendant seulement de k, indépendante aussi bien de μ que de k_1, au moins autant que k_1 reste relativement faible vis-à-vis de k et que la masse M du pendule reste petite vis-à-vis de μ. La phase possible des deux mouvements oscillatoires (pendule et support) reste indifférente.

Seule l'amplitude $ae^{-\rho t}$ est affectée par le frottement moléculaire et diminue lentement; elle reste indépendante de la masse d'inertie du support; un tel amortissement, toujours très faible, fournirait en outre, s'il pouvait être évalué isolément, la valeur du rapport $\frac{k_1}{k}$.

PHYSIQUE. — *Polarisation rotatoire magnétique de l'azote et de l'oxygène liquéfiés.* Note de M. J. **Chaudier**, présentée par M. E. Bouty.

La polarisation rotatoire magnétique des gaz liquéfiés a été seulement étudiée dans le cas des gaz facilement liquéfiables [anhydre sulfureux (1), protoxyde d'azote et chlorure de méthyle (2)]; je me suis proposé, dans ces recherches, d'étendre l'étude de ce phénomène aux gaz difficilement liquéfiables et de mesurer le pouvoir rotatoire magnétique et la dispersion rotatoire de l'azote et de l'oxygène liquides, que l'industrie prépare actuellement très purs.

Dispositif. — J'ai employé le dispositif classique de Verdet et Becquerel, légèrement modifié : un nicol polariseur est placé à une extrémité du canal cylindrique creusé axialement dans un électro-aimant de Ruhmkorff; à l'autre extrémité, comme analyseur, se trouve un polariseur à pénombre de Cornu, dont les rotations se lisent sur un cercle divisé; une loupe permet d'observer nettement les demi-disques.

Cette permutation du polariseur et de l'analyseur du polarimètre Cornu-Duboscq, a pour but de rendre la netteté de la ligne de séparation des demi-disques, indépendante des changements de mise au point, dus à l'interposition des vases cylindriques de Dewar non argentés, entre les deux pôles de l'électro-aimant.

En renversant, dans chaque expérience, le sens du courant qui traverse l'électro-

(1) Bichat, *Journal de Physique*, t. IX, 1880, p. 275.

(2) Siertsema, *Communications from the Physical Laboratory of Leiden*, nos 57, 80 et 90.

aimant, on mesure le double de la rotation imprimée au plan de polarisation de la lumière. Le vernier donne la minute, et l'erreur d'observation est inférieure à 3 minutes pour chaque lecture: les résultats sont donc exacts à 3 minutes près. Les champs magnétiques utilisés sont compris entre 1500 et 3000 gauss.

Avec ce dispositif optique, il est nécessaire d'employer des sources de lumière monochromatique. Je me suis servi de la lampe Cooper-Hewitt à vapeur de mercure et d'écrans solides ou liquides appropriés, pour obtenir et isoler les radiations jaunes, vertes, violettes, de longueur d'onde bien définies. J'ai obtenu des radiations rouges et orangées sensiblement monochromatiques et de longueurs d'onde suffisamment exactes, en opérant avec la lumière émise par un tube à néon en activité, tamisée successivement par un verre rouge et une dissolution saturée de bichromate de potasse; de même, les radiations bleues m'ont été fournies par un tube à hélium, dont les radiations jaunes étaient absorbées par une dissolution ammoniacale saturée de sulfate de cuivre.

Résultats. — Après chaque détermination, il faut retrancher des rotations observées, celles qui sont dues au verre du vase cylindrique; ces corrections ne sont pas négligeables et varient de 18 à 41 minutes, selon le vase et la radiation employés.

Les résultats indiqués sont tous corrigés de cette rotation parasite :

1° J'ai d'abord vérifié, en lumière jaune du sodium, que la rotation magnétique du plan de polarisation était proportionnelle à l'intensité du champ et à l'épaisseur traversée, lorsque les liquides actifs étaient l'oxygène ou l'azote liquéfiés.

Les vases cylindriques de Dewar employés dans cette vérification avaient $1^{cm},8$, $2^{cm},6$, $4^{cm},1$ et 5^{cm} de diamètre intérieur.

2° J'ai mesuré, par rapport à la raie D et à 18°, le pouvoir rotatoire magnétique de l'azote et de l'oxygène liquéfiés; ces substances agissent sur la lumière polarisée, dans un champ magnétique, dans le même sens que l'eau; elles sont donc douées d'un pouvoir rotatoire magnétique *positif*.

Les pouvoirs rotatoires ρ_{Az}^{D} de l'azote et ρ_{O}^{D} de l'oxygène ont respectivement pour valeur, à 18° :

$$\rho_{Az}^{D} = 0,00415 = 0,415 \times 10^{-2},$$
$$\rho_{O}^{D} = 0,00782 = 0,782 \times 10^{-2}.$$

Le pouvoir rotatoire magnétique de l'oxygène est sensiblement double de celui de l'azote [1].

---

[1] L'azote liquide est paramagnétique, comme l'oxygène, quoique à un degré moindre. Cette propriété se manifeste très nettement dans un champ magnétique non uniforme, dans lequel l'azote est attiré aux points où l'intensité du champ est maxima; dans le vase cylindrique, la surface du liquide prend alors la forme extérieure d'une lyre plus ou moins allongée, selon l'éloignement du liquide et l'intensité du champ.

A la même température et pour la raie D, le pouvoir rotatoire magnétique du sulfure de carbone $\rho_{CS^2}^D$ a pour valeur :

$$\rho_{CS^2}^D = 0,042 = 4,2 \times 10^{-2}.$$

3° J'ai étudié la dispersion rotatoire magnétique de ces deux gaz liquéfiés ; les résultats obtenus avec des radiations de diverses longueurs d'onde sont inscrits dans le Tableau suivant :

	λ en μμ.	626. (moyen)	610. (moyen)	589.	578.	546.	501.	436.
	$\frac{(\lambda_D)^2}{\lambda}$	0,885	0,932	1	1,038	1,164	1,340	1,825
Azote..............	$\frac{\rho}{\rho_D}$	0,871	0,935	1	1,043	1,172	1,355	1,860
Oxygène...........	$\frac{\rho}{\rho_D}$	0,897	0,948	1	1,062	1,103	1,118	1,319
Sulfure de carbone..	$\frac{\rho}{\rho_D}$	0,863	»	1	1,170	1,221	»	2,190
Chlorure de méthyle, liq. (Siertsema)...	$\frac{\rho}{\rho_D}$	0,90	»	1	»	1,17	»	1,90

De l'examen de ce Tableau, où j'ai ajouté la dispersion rotatoire magnétique du sulfure de carbone et celle du chlorure de méthyle liquéfié (Siertsema), il résulte les conséquences suivantes :

a. L'azote obéit à la loi de l'inverse du carré de la longueur d'onde, et ne s'en écarte que pour les radiations de courte longueur d'onde ; sa dispersion rotatoire magnétique est voisine de celle du chlorure de méthyle ; elle est moins grande que celle du sulfure de carbone qui, d'ailleurs, ne suit pas la loi de Biot.

b. L'oxygène possède une faible dispersion rotatoire magnétique et n'obéit pas à la loi de l'inverse du carré de la longueur d'onde, mais l'écart est en sens inverse de celui que présente le sulfure de carbone.

Remarque. — L'étude de la dispersion rotatoire des gaz conduit à des résultats analogues aux précédents pour l'azote et l'oxygène, à l'état gazeux [1].

---

[1] Becquerel, *Journal de Physique*, t. IX, 1880, p. 265.

ÉLECTRO-OPTIQUE. — *Sur les images multiples que présentent les rayons de Röntgen après avoir traversé des cristaux.* Note de M. **M. de Broglie**, présentée par M. E. Bouty.

MM. Friedrich et Knipping et M. Laue ([1]) ont découvert des apparences de diffraction dans le passage des rayons X à travers les cristaux; j'ai obtenu, en employant sensiblement le même dispositif, les résultats suivants :

1° Les diagrammes relatifs à des cristaux différents (blende, fluorine, sel gemme, magnétite) appartenant au même système sont les mêmes quant à la position des images secondaires (résultat également observé, je crois, par M. Laue et ses collaborateurs depuis leur premier travail).

Cependant l'intensité relative des images n'est pas la même en passant d'un cristal à un autre; c'est ainsi que certaines images, très intenses avec le sel gemme, sont faibles avec la fluorine et inversement; à ce point de vue, la fluorine se rapproche plus de la blende que du sel gemme.

2° Le diagramme obtenu avec un cristal de sel gemme, plongé dans l'azote liquide, est le même que celui qui correspond à la température ordinaire; les images sont aussi nettes, mais ne le sont pas davantage, et il ne semble pas en apparaître de nouvelles. Ce résultat est intéressant au point de vue de l'explication du phénomène par une sorte de diffraction provenant du système réticulaire cristallin; il montre que les paramètres de ce réseau, qui ne sont définis qu'en moyenne à cause de l'agitation thermique, ne semblent pas éprouver de variations notables ni acquérir une signification plus précise, quand la température passe de 300° à 190° absolus.

3° Un cristal de sel gemme, traversé par les rayons de Röntgen perpendiculairement aux faces du cube, a été soumis à un champ magnétique transversal (parallèle à une arête du cube) de l'ordre de 10000 unités; le diagramme n'offre aucune différence avec celui que l'on obtient sans l'intervention du champ magnétique.

4° Une lame de magnétite, dont les faces sont parallèles à celles de l'octaèdre, a été disposée de façon à être traversée normalement par les rayons; on pouvait exciter un champ magnétique contenu dans le plan de la lame et parallèle à un côté du triangle qui limite la face de l'octaèdre.

([1]) Laue, Friedrich et Knipping, *Ber. der Kön. Bayerischen Akademie*, juin et juillet 1912.

Le diagramme obtenu n'a pas éprouvé de modification, lors de l'excitation du champ magnétique ; il est juste d'observer que, conformément aux travaux de M. P. Weiss ([1]), la magnétite se comporte au point de vue magnétique comme isotrope pour les directions contenues dans une face d'octaèdre.

Cette expérience et la précédente relative au sel gemme montrent cependant qu'aussi bien dans un cristal magnétique que dans un cristal ordinaire, la symétrie particulière du champ magnétique ne réagit pas pour modifier la symétrie ternaire ou quaternaire des diagrammes obtenus.

La figure enregistrée dans le cas de la magnétite traversée par le faisceau incident suivant une normale aux faces de l'octaèdre (axe ternaire du réseau cubique) se rapproche de celle donnée par M. Laue et ses collaborateurs pour la blende semblablement orientée ([2]).

On y remarque d'une façon tout à fait frappante et beaucoup plus marquée que sur la figure 8 du Mémoire cité, la disposition des taches en courbes ovoïdes passant par le centre de figure. M. Wulff ([3]) a fait remarquer que la théorie permettait de s'attendre à trouver des ellipses ainsi disposées; l'aspect des clichés est certainement favorable à ce point de vue.

La comparaison des diagrammes de la magnétite et de la blende montre encore que la nature du cristal se fait sentir sur les intensités relatives des images.

Enfin le fait de la persistance des images quand le cristal et la région que traversent les rayons secondaires sont plongés dans un champ magnétique déjà assez intense, indique bien que les rayons secondaires qui produisent les images sont du type γ ou Röntgen, ainsi du reste que l'indique leur pénétration.

PHOTOCHIMIE. — *Énergie absorbée dans les réactions photochimiques.* Note ([4]) de MM. **Victor Henri** et **René Wurmser**.

Pour comparer entre elles les diverses réactions photochimiques et établir leur mécanisme énergétique, il est important de déterminer, sur un grand nombre d'exemples, la quantité d'énergie de rayonnement que doit

---

([1]) *Journal de Physique*, 1896, p. 345.

([2]) Laue, Friedrich et Knipping, *loc. cit.*, Tableau III, *fig.* 7 et 8.

([3]) Wulff, *Physik. Zeitschrift*, 15 mars 1913, p. 217.

([4]) Présentée dans la séance du 25 mars 1913.

absorber une molécule pour que la réaction ait lieu. En s'appuyant sur la théorie des *quanta*, Einstein a énoncé la loi générale de l'équivalent photochimique : la quantité d'énergie qui doit être absorbée par molécule pour qu'il y ait réaction chimique est égale à un quantum d'énergie, c'est-à-dire à la valeur $h\nu$, où h est la constante de Planck, soit $6,5.10^{-27}$, et ν la fréquence de la radiation incidente. Le raisonnement d'Einstein suppose que les molécules réagissent indépendamment les unes des autres, c'est-à-dire que la réaction est monomoléculaire.

Nous présentons les résultats d'expériences faites sur la décomposition photochimique de l'eau oxygénée et l'hydrolyse de l'acétone, ainsi que des calculs relatifs au minimum d'énergie capable de provoquer une sensation lumineuse.

Nous avons employé comme source de rayons ultraviolets une étincelle condensée de cadmium. Au moyen d'une pile de Rubens et d'une lampe Hefner, nous avons mesuré en valeur absolue l'énergie émise. Les valeurs obtenues de l'énergie reçue par une surface de 1^{cm^2}, à 1^m de distance de l'étincelle, sont les suivantes :

Raies du cadmium.	2144	2195	groupe 2266	groupe 2300	2469	2572	2748	2880-2980	3200-3600
Énergie en ergs:sec.	0,069	0,091	0,107	0,210	0,007	0,022	0,030	0,021	0,087

1° La concentration initiale de l'eau oxygénée était 0,037 normale, la distance à l'étincelle 4^{cm}, l'épaisseur de la couche liquide $0^{cm},2$ et la surface exposée 5^{cm^2}. On dosait après 5 minutes d'exposition avec une solution de permanganate. L'absorption de H^2O^2 a été mesurée quantitativement pour toutes les régions du spectre. Le Tableau suivant donne les valeurs de l'énergie absorbée :

Raies.	Proportion pour 100 d'énergie absorbée.	Énergie incidente en ergs : sec.	Énergie absorbée en ergs : sec.
2980-2880......	2,5	65,0	1,6
2748...........	8	94,5	7,6
2572...........	24	68,0	16,3
2469...........	41	21,7	8,9
2300-2288......	74	651,0	476,7
2265...........	80	331,7	265,3
2195...........	87	282,0	245,3
2144...........	92	213,9	196,8

En 1 seconde, 1218,5 ergs sont absorbés et $1,9.10^{16}$ molécules sont détruites. Par molécule transformée l'énergie est

$$E = 6,4.10^{-14}.$$

En prenant comme valeur moyenne de ν, $1,3.10^{15}$, on devrait trouver d'après la loi

d'Einstein pour E la valeur, environ 100 fois plus grande,

$$8,5.10^{-12}.$$

2° La solution d'acétone était normale, l'épaisseur $0^{cm},4$, la surface exposée $2^{cm^2},52$ et la distance à l'étincelle 3^{cm}. Après 15 minutes d'exposition, on dosait par iodométrie. Le Tableau suivant donne les valeurs de l'énergie absorbée :

Raies.	Proportion pour 100 d'énergie absorbée.	Énergie incidente en ergs : sec.	Énergie absorbée. en ergs : sec.
2980-2880...........	86	58,8	50,5
2748................	100	85,4	85,4
2572................	100	61,6	61,6
2469................	100	19,6	19,6
2300-2288...........	95	588,0	558,6
2265................	86	299,0	257,1
2195................	63	254,0	160,0
2144................	38	193,0	73,3

En 1 seconde, 1266 ergs sont absorbés et $2,3.10^{17}$ molécules sont détruits. On trouve

$$E = 5,5.10^{-15}.$$

En prenant $\nu = 1,15.10^{15}$, on devrait trouver, d'après la loi d'Einstein, une valeur environ 1000 fois supérieure

$$7,53.10^{-12}.$$

3° L'énergie tombant sur la pupille, suffisante pour produire une impression lumineuse, est, d'après Grijns et Noyers, $4,4.10^{-11}$ ergs. 8 à 10 pour 100 seulement de cette énergie appartiennent au spectre visible, soit

$$E = 3,96.10^{-12}.$$

L'œil est plus particulièrement sensible au vert jaune. En prenant $\nu = 5,76.10^{14}$, on a

$$E = 6,8.10^{-27} \times 5,76.10^{14}.$$

Le coefficient $6,8.10^{-27}$ est très sensiblement égal à h. Mais, dans les expériences, l'image formée est d'environ $\frac{1}{100}$ de millimètre carré. Si la loi de l'équivalent était applicable, il suffirait, pour avoir une impression lumineuse, qu'une molécule soit décomposée dans $\frac{1}{100}$ de millimètre carré de rétine. Ce qui est inadmissible.

Dans les trois cas que nous avons examinés, *l'énergie nécessaire à la destruction d'une molécule est inférieure au quantum d'énergie d'Einstein* (1).

(1) M. Marcel Boll, qui se pose un problème analogue à propos de l'hydrolyse photochimique des acides chloroplatiniques, nous dit obtenir des résultats comparables.

La lumière semble n'y intervenir que comme catalyseur, pour mettre les molécules dans un état tel qu'elles puissent ensuite réagir d'elles-mêmes. Mais ces trois réactions sont exothermiques, elles se font avec beaucoup de facilité. Il est très possible que, pour des réactions où interviennent des molécules plus stables, ou des réactions endothermiques, une quantité d'énergie plus grande soit nécessaire et que l'on retrouve la loi d'Einstein.

La mesure de l'énergie nécessaire à la décomposition d'une molécule d'un corps pourrait peut-être servir à déterminer le degré de stabilité de ce corps.

CHIMIE PHYSIQUE. — *La tension d'expansibilité des fluides normaux.* Note de M. L. GAY, présentée par M. A. Haller.

Dans une Note précédente [1] j'ai établi théoriquement et vérifié, dans le cas de C^6H^6, la relation

$$(\text{I}) \qquad \log\pi = \log\frac{RT}{V-b} + \frac{b}{V-b} - \frac{E\mathcal{L} + PV - RT}{RT}$$

(π, tension d'expansibilité; V, volume moléculaire; P, pression; $\mathcal{L}$, chaleur moléculaire d'idéalisation). J'avais adopté $H = 1$, $R = 6{,}2170$ (unités : le millimètre de Hg et le centimètre cube); je crois $H = 1{,}008$, $R = 6{,}2380$ préférables; alors pour C^6H^6, entre 0° et 60°, $b = 69^{\text{cm}^3},5 \pm 0{,}1$. J'ai calculé la pression interne K des vapeurs saturantes (qu'il faut déduire de la pression externe du gaz pour obtenir sa tension d'expansibilité) à l'aide de la relation empirique

$$K = \frac{1}{2}\left(T\frac{\partial P}{\partial T} - P\right) = \frac{P^2}{T^2}\left(\frac{\theta^2}{\pi}10^{-4}.18{,}85\right)\left(3\frac{\theta^2}{T^2} - \sqrt{2}\frac{\theta}{T} + \sqrt{2}\right),$$

que j'ai tirée des relations de Leduc [2],

$$PV = \varphi RT,$$

$$\varphi = 1 - 10^{-4}.18{,}85\frac{\theta}{T}\left(2\frac{\theta^3}{T^3} - \sqrt{2}\frac{\theta^2}{T^2} + 2\sqrt{2}\frac{\theta}{T} - 1\right)\frac{P}{\pi} - 10^{-4}.3{,}5\frac{\theta^3}{T^3}\left(\frac{\theta}{T} - 1\right)\frac{P^2}{\pi^2}$$

(P, pression externe en centimètre de Hg; π, pression critique en atmosphère; θ, température critique absolue).

---

(1) *Comptes rendus*, 16 octobre 1911.

(2) *Ann. de Chim. et de Phys.*, 8e série, t. XIX, 1910, p. 469.

J'ai effectué quelques nouvelles vérifications. Les tensions de vapeur adoptées ainsi que les constantes critiques sont de Young [1].

Monochlorobenzène. — Densités de Biron [2] extrapolées de 80° à 120°. La chaleur moléculaire d'idéalisation est donnée par la relation

$$E\mathfrak{L} = 323\,870\,000 - 440\,550\,t$$

(concordance entre les valeurs des tensions d'expansibilité déduites de cette relation et celles calculées à l'aide des tensions de vapeur : $\frac{1}{1000}$ de 60° à 180°, $\frac{1}{100}$ à 40°).

t.	P (tensions de vapeur).	Π.	V.	b.	K.
°	mm		cm		atm
0........	2,56	2,57	99,76	83,43	1371
20........	8,83	8,84	101,70	83,54	1323,5
40........	25,68	25,65	103,73	83,58	1274,5
60........	64,78	64,40	105,86	83,54.5	1223,5
80........	144,88	142,88	108,11	83,39	1170
100........	292,76	285,41	110,53	83,11.5	1116
120........	543,31	521,77	113,11	82,67	1059

Entre 0° et 80° : $b = 83^{cm^3},5 \pm 0,1$.

Isopentane. — Volumes moléculaires déduits de $D_4^0 = 0,63930$ [Young (*loc. cit.*) et Biron [3]] et de la relation d'Hoffmann et Rothe [4]

$$V_t = V_0[1 + 10^{-6}t(1506,97 + 3,4535\,t + 0,00975\,t^2 + 0,00001\,t)],$$
$$E\mathfrak{L} = 196\,770\,000 - 328\,000\,t$$

(concordance, pour les tensions d'expansibilité : $\frac{1}{500}$ de — 20° à + 40°; $\frac{1}{200}$ à — 30°) :

t...........	—30°	—20°	0°	20°	40°
b...........	83,32	83,32	83,25	83,06	82,72
K	806	790,5	757	721	682,5

Jusqu'au voisinage de 20°, D_4^0, $b = 83^{cm^3},2 \pm 0,1$.

Diisopropyle. — Volumes moléculaires déduits de $D_4^0 = 0,67948$ [Young (*loc. cit.*)]

---

(1) *J. chem. Soc.*, t. LV, 1889, p. 486.

(2) *J. Soc. phys. chim. r.*, t. XLII, n° 2, 1910, p. 135.

(3) *J. Soc. phys. chim. r.*, t. XLII, 1900, p. 147.

(4) *Z. f. Instrumentenkunde*, t. XXVII, 1907, p. 265. Jusqu'à 20° cette relation concorde très bien avec celle de Thorpe et Jones (*J. chem. Soc.*, t. LXIII, 1893, p. 273); à 40°, la concordance reste encore $0^{cm},1$.

et de la formule de Zander ([1])

$$V_t = V_0(1 + 0{,}0_2 13147\,t + 0{,}0_5 1520\,t^2 + 0{,}0_7 25591\,t^3),$$

$$E\mathcal{L} = 227730000 - 381100\,t$$

(concordance pour les tensions d'expansibilité : $\frac{1}{200}$ de 0° à 80°; $\frac{1}{150}$ à −10°) :

t..........	−10°	0°	10°	30°	50°	70°
b..........	97,995	98,01	98,015	97,735	97,285	96,73
K.........	795	778	762	724	684	642,5

Jusqu'au voisinage de 30°, $b = 97^{\text{cm}^3},9 \pm 0,1$.

Cyclohexane. — J'ai établi la relation empirique

$$D_4^t = 0{,}79706 - \frac{0{,}000891\,t}{1 - 0{,}000891\,t},$$

qui, entre 10° et 65°, concorde au $\frac{1}{6000}$ avec mes résultats expérimentaux :

$$E\mathcal{L} = 255620000 - 366000\,t$$

(concordance pour les tensions d'expansibilité : $\frac{1}{150}$ de 10° à 100°) :

t............	10°	20°	40°	60°	80°	100°
b...........	83,46	83,47	83,35	83,185	82,935	82,42
K...........	996,5	979,5	939	898	854,5	807

Jusqu'au voisinage de 60°, $b = 83^{\text{cm}^3},35 \pm 0,1$.

Nous croyons donc la relation (I) nettement vérifiée expérimentalement quelles que soient les réserves qui peuvent être faites sur son établissement théorique.

Pour tous les corps étudiés, le coefficient de compressibilité est toujours inférieur à $\frac{V - b}{V(P + K)}$; d'où ce résultat, qui semble paradoxal : la pression interne diminue avec le volume, la température restant constante.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Combinaisons du chlorure de cérium avec le gaz ammoniac.* Note de M. **Barre**, présentée par M. Le Chatelier.

Les chlorures et bromures anhydres de cérium et de lanthane donnent avec une grande facilité des combinaisons d'addition avec le gaz ammoniac.

([1]) *Lieb. Ann.*, t. CCXIV, 1882, p. 138. Cette formule concorde, jusqu'à 40°, au $\frac{1}{5000}$ avec les données de Young.

Je me propose dans la présente Note d'indiquer les résultats obtenus avec le chlorure de cérium.

Le chlorure était préparé par action du chlorure de soufre sur l'oxyde CeO^2. On a toujours employé le chlorure fondu bien cristallisé, et les combinaisons ammoniées ont été préparées en faisant arriver le gaz ammoniac bien desséché sur le chlorure placé dans un tube réservoir et maintenu à −80° environ dans un mélange de neige carbonique et d'acétone.

La réaction de l'ammoniac sur le chlorure de cérium s'effectue avec un assez grand dégagement de chaleur et une augmentation considérable du volume de la masse. Lorsqu'il y avait un excès d'ammoniac liquide, on soudait rapidement, en évitant l'humidité, le tube réservoir à un appareil composé uniquement d'un manomètre à air libre et d'un robinet à boisseau incliné et à tube capillaire de Geissler. Ce robinet ne permet qu'un contact négligeable de l'ammoniac et de la graisse et peut soutenir une pression de plusieurs atmosphères.

L'étude des combinaisons ammoniées a été faite par la détermination des courbes de tensions de dissociation. Ce n'est qu'après avoir établi ainsi les conditions d'existence des différents composés que l'on a déterminé leur composition.

1° *Tensions de dissociation :*

Composés...	A.		B.		C.	
	Température.	Pression.	Température.	Pression.	Température.	Pression.
	°	mm	°	mm	°	mm
	−69	66	−30	328	0	262
	−40	558	−18	635	9,5	497
	−35	678	−15	710	19	800
	−26	960	−11	882	27	1080
	−16,5	1524	0	1572	30	1305
	0	3148				

Composés...	D.		E.	
	Température.	Pression.	Température.	Pression.
	°	mm	°	mm
	50	224	90	414
	60	490	100	828
	65	652	105	1211
	70,5	919		
	75	1288		

2° *Formule des composés.* — Cette formule a été déterminée en mettant

du chlorure de cérium bien pur, pesé, en présence d'un excès de gaz ammoniac liquide, puis scellant le tube en le laissant revenir à la température ordinaire pour que la combinaison soit bien complète, refroidissant à nouveau, ouvrant le tube et enfin le maintenant sous la pression atmosphérique dans les limites d'existence du composé dont on voulait obtenir la formule. L'augmentation de poids du tube indiquait l'ammoniac fixé.

Composé A. — Par suite du peu de différence entre la tension de dissociation de ce composé et la tension de l'ammoniac liquide sous la pression ordinaire, il est assez difficile de maintenir longtemps le corps dans des limites de température convenables pour bien chasser tout l'ammoniac sans faire subir à la combinaison un commencement de décomposition. Trois analyses faites de ce composé sont cependant bien concordantes et indiquent la formule :

$CeCl^3, 20AzH^3$. — AzH^3 pour 100 de $CeCl^3$: trouvé 137,5, 136,7 et 138,4; calculé 137,97.

Composé B : $CeCl^3, 12AzH^3$. — AzH^3 pour 100 de $CeCl^3$: trouvé 81,7 et 81,5; calculé 82,75.

Composé C : $CeCl^3, 8AzH^3$. — AzH^3 pour 100 de $CeCl^3$: trouvé 55,02 et 54,72; calculé 55,17.

Composé D : $CeCl^3, 4AzH^3$. — AzH^3 pour 100 de $CeCl^3$: trouvé 26,92 et 28,21; calculé 27,58.

Composé E : $CeCl^3, 2AzH^3$. — AzH^3 pour 100 de $CeCl^3$: trouvé 13,36 et 14,33; calculé 13,79.

Tous ces composés se présentent sous forme de poudres blanches décomposables par l'eau.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Dosage du calcium à l'état de tungstate.* Note de M. A. **Saint-Sernin**, présentée par M. Ch. Moureu.

Ce nouveau procédé de dosage du calcium, qu'après contrôle sur des solutions de titre connu j'ai appliqué, comparativement avec les procédés pondéraux classiques, à l'analyse de ciments et de chaux hydrauliques, est basé sur la précipitation d'une solution d'un sel de calcium par une solution de tungstate de sodium.

Quand on traite une solution ammoniacale de chlorure de calcium portée à l'ébullition par un excès de solution aqueuse de tungstate neutre de sodium à 20 pour 100, il se forme un précipité cristallin octaédrique de TuO^4Ca, d'une densité de 6,02 à 6,08, qui gagne rapidement le fond du vase.

Ce précipité, très lourd, insoluble dans l'eau, se prête sans délai à la filtration et aux lavages répétés par décantation.

Recueilli sur filtres tarés, lavé à l'eau chaude, puis porté à l'étuve à 100° jusqu'à poids constant, il fournit un sel dont le poids, multiplié par 0,1944, donne celui de la chaux CaO, ou qui, multiplié par 0,1393, indique celui du calcium Ca contenu dans la prise d'essai.

Les chiffres obtenus par la calcination ménagée au rouge sombre du filtre, d'une part, et du précipité, d'autre part, sont toujours trop faibles.

Les tungstates alcalins et de magnésium étant seuls solubles, lorsque, au cours d'une analyse systématique, on se sera débarrassé du fer et de l'alumine par l'ammoniaque, de la chaux par le tungstate de soude, le magnésium pourra être précipité dans les liquides filtrés et de lavage à l'état de phosphate ammoniaco-magnésien.

Ce procédé simple, rapide et très précis, qui ne réclame pas de source calorifique puissante, applicable au dosage de faibles quantités, permettant en outre la séparation du magnésium d'avec le calcium, me paraît susceptible d'être adopté dans la majorité des cas.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Préparation des alcools primaires par réduction des éthers-sels au moyen de l'alcool absolu et du sodammonium.* Note de M. **E. Chablay**, présentée par M. A. Haller.

MM. Bouveault et Blanc [1] ont indiqué un excellent procédé de préparation des alcools primaires basé sur la réduction des éthers-sels au moyen de l'alcool absolu et du sodium.

J'ai montré récemment [2] que le sodammonium réagit sur les éthers-sels des acides monobasiques saturés de la série grasse conformément aux équations suivantes :

$$(a)\qquad R.COOR' + Az^2H^6Na^2 = R.COAzHNa + R'ONa + AzH^3 + H^2,$$

$$(b)\qquad R.COOR' + Az^2H^6Na^2 + H^2 = R.CH^2ONa + R'ONa + 2AzH^3.$$

L'ensemble des réactions (*a*) et (*b*) donnant la réaction finale

$$(1)\qquad 2R.COOR' + 2Az^2H^6Na^2 = R.COAzHNa + R.CH^2ONa + 2R'ONa + 3AzH^3.$$

Si l'amide ne se trouve pas à l'état de dérivé sodé, on a la réaction

$$(2)\qquad 3R.COOR' + 2Az^2H^6Na^2 = 2R.COAzH^2 + R.CH^2ONa + 3R'ONa + 2AzH^3.$$

(1) Bouveault et Blanc, *Bull. Soc. chim.*, 3e série, t. XXXI, p. 666.

(2) E. Chablay, *Comptes rendus*, t. 154, p. 364.

On voit d'après ces relations que le rendement en alcool $R.CH^2OH$ ne peut être que la moitié ou au plus le tiers de l'éther-sel employé. Si donc on se propose comme but la préparation des alcools primaires on devra chercher à en augmenter le rendement par l'emploi d'une réaction supplémentaire capable de fournir l'hydrogène naissant nécessaire à la réduction de l'amide à l'état d'alcool correspondant

$$R.COAzH^2 + 2H^2 = R.CH^2.OH + AzH^3.$$

La réaction de l'alcool et en particulier de l'alcool absolu sur le sodammonium répond parfaitement à cette nécessité

$$2C^2H^5.OH + Az^2H^6Na^2 = 2C^2H^5.ONa + 2AzH^3 + H^2.$$

Dans ces conditions on évite presque complètement la formation d'amide et l'on obtient les alcools primaires correspondants avec de bons rendements.

Mode opératoire. — Dans un ballon de 1^l environ on introduit du sodium en fils, sur lequel on verse de 200^{cm^3} à 300^{cm^3} d'AzH^3 liquide de façon à obtenir une solution bleue de sodammonium. Ce ballon étant refroidi vers —80° on fait couler, au moyen d'un entonnoir à brome, l'éther-sel à réduire dissous dans l'alcool absolu et dans les proportions indiquées par la réaction

$$R.COOR' + 2C^2H^6O + 2Az^2H^6Na^2 = R.CH^2.ONa + 2C^2H^5.ONa + R'ONa + 4AzH^3.$$

On obtient ainsi rapidement la décoloration de la solution bleue de sodammonium. Une fois AzH^3 éliminé, il reste dans le ballon un mélange d'alcools sodés qu'on décompose par l'eau. On en retire ensuite l'alcool $R.CH^2.OH$ par entraînement à la vapeur et distillation fractionnée comme il est dit dans le procédé Bouveault et Blanc.

Les alcools suivants ont été préparés par le procédé que je viens d'indiquer :

Éthers-sels réduits.	Alcools obtenus.
Butyrate de méthyle normal.	Butanol normal $C^4H^{10}O$.
Isovalérianate de méthyle.	Alcool isoamylique $C^5H^{12}O$.
Caproate d'éthyle.	Hexanol $C^6H^{14}O$.
Heptylate de méthyle.	Heptanol $C^7H^{16}O$.
Caprylate »	Octanol $C^8H^{18}O$.
Laurate »	Dodécanol $C^{12}H^{26}O$.
Myristate »	Tétradécanol $C^{14}H^{30}O$.
Palmitate »	Hexadécanol $C^{16}H^{34}O$.

Éthers-sels d'acides bibasiques. — Les deux groupements (—COOR') sont réduits et l'on obtient des glycols biprimaires.

Sébate de méthyle $COOCH^3-(CH^2)^8-COOCH^3$. — Cet éther fournit le décanediol-1.10 $CH^2OH-(CH^2)^8-CH^2.OH$, se présentant en magnifiques cristaux fusibles à 71°,5.

α-α-Diméthylglutarate de méthyle $COOCH^3 - C(CH^3)^2 - CH^2 - CH^2 - COOCH^3$.

Cet éther m'a été fourni obligeamment par M. Blanc; il donne le glycol correspondant au 2.2-diméthylpentanediol-1.5

$$CH^2OH - C(CH^3)^2 - CH^2 - CH^2 - CH^2OH,$$

liquide incolore bouillant à 133° sous 15mm.

Éthers-sels dont l'acide contient un radical aromatique :

Phénylacétate d'éthyle $C^6H^5 - CH^2 - COOC^2H^5$. — Se réduit normalement en fournissant l'alcool phényléthylique $C^6H^5 - CH^2 - CH^2.OH$, dont l'odeur rappelle celle de l'eau de roses.

Cinnamate de méthyle $C^6H^5 - CH = CH - COOCH^3$. — Cet éther fournit non pas l'alcool cinnamique, mais l'alcool phénylpropylique par suite de l'hydrogénation de la double liaison $C^6H^5 - CH^2 - CH^2 - CH^2OH$.

Ce fait a d'ailleurs été observé par MM. Bouveault et Blanc (1) lorsqu'ils ont appliqué leur méthode d'hydrogénation au cinnamate de méthyle; par Fittig (2) et Rügheimer (3) dans l'action de l'amalgame de sodium sur l'alcool cinnamique et par moi-même (4) dans l'action du sodammonium sur l'alcool cinnamique.

CRISTALLOGRAPHIE. — *Sur une nouvelle forme du bichromate de potassium.* Note de M. A. Duffour, présentée par M. Wallerant.

Peu de substances ont été aussi souvent étudiées par les cristallographes que les bichromates alcalins anhydres. Il est cependant manifeste que de profondes lacunes subsistent encore dans notre connaissance de leurs relations morphologiques.

C'est ainsi que les cristaux tricliniques bien connus du bichromate dipotassique, se distinguent nettement des cristaux toujours monocliniques du sel ammoniacal. Le bichromate de rubidium donne, il est vrai, des cristaux tricliniques et monocliniques, mais si ces derniers diffèrent peu des cristaux du sel ammoniacal, les grandeurs paramétriques des premiers semblent incompatibles avec celles du sel potassique.

Sans doute, avec M. Wyrouboff (5), faut-il voir dans ces particularités

---

(1) Bouveault et Blanc, *Bull. Soc. chim.*, t. XXXI, 1904, p. 1209.
(2) Fittig, *Berichte der deutsch. chem. Gesell.*, t. VI, p. 214.
(3) Rügheimer, *Liebig's Annalen*, t. CLXXII, p. 122.
(4) E. Charlay, *Comptes rendus*, t. 143, 1906, p. 829.
(5) G. Wyrouboff, *Bull. Soc. Min.*, t. XIII, 1890, p. 309.

la manifestation d'un cas d'*isotrimorphisme*. Mais aucune mesure directe et précise n'ayant pu confirmer cette opinion, on ne saurait regarder comme définitivement élucidée la question de l'isomorphisme de ces importantes combinaisons. Aussi, ne serait-ce qu'à ce seul point de vue la réalisation de cristaux monocliniques mesurables du bichromate de potassium offre-t-elle déjà un certain intérêt.

Il était en outre permis de penser que l'étude de cette forme, assez instable pour n'avoir pas encore été signalée, permettrait de préciser les conditions de sa transformation en cristaux tricliniques et apporterait ainsi une précieuse contribution à la question de l'équilibre des deux formes du sel de rubidium, question si controversée et discutable encore, semble-t-il, malgré les intéressantes, mais un peu contradictoires observations de MM. Stortenbecker (1), Gossner (2) et Le Bel (3). Cet espoir, comme on le verra, n'a été qu'en partie réalisé.

J'ai obtenu de tels cristaux monocliniques en ajoutant, à une solution de chromate neutre dipotassique, un excès notable de sulfate d'aluminium qui le transforme partiellement en bichromate, avec précipitation d'alumine :

$$(SO^4)^3Al^2 + 6CrO^4K^2 + 3H^2O \rightleftarrows 3Cr^2O^7K^2 + 3SO^4K^2 + 2Al(OH)^3$$

La liqueur concentrée à chaud, puis filtrée, laisse déposer par refroidissement et *à la fois*, comme les solutions de sel rubidique, deux sortes de cristaux de bichromate, les cristaux tricliniques habituels et des cristaux monocliniques, beaucoup moins nombreux et plus petits ($d = 1^{mm}$ à 2^{mm}).

Ces cristaux monocliniques, dont la teinte légèrement plus jaune se confond presque avec celle des cristaux tricliniques, rappellent, par leur contour à peu près carré ou octogonal, les cristaux du sel ammoniacal. Comme ceux-ci, ils sont aplatis suivant $p(001)$ et présentent en outre les faces $d^{\frac{1}{2}}(111)$, $b^{\frac{1}{2}}(11\bar{1})$, $g^1(010)$, $o^1(101)$, $a^1(10\bar{1})$, plus rarement $e^1(011)$.

Ces faces, bien planes et très réfléchissantes, se prêtent à d'excellentes mesures qui ne laissent aucun doute sur l'isomorphisme des trois espèces de cristaux monocliniques :

$Cr^2O^7K^2$	$a:b:c$	$= 1,0167 : 1 : 1,7716$	$\beta = 91°55'$
$Cr^2O^7Rb^2$	»	$= 1,0202 : 1 : 1,8081$	» $= 93°28',5$
$Cr^2O^7Am^2$	»	$= 1,0271 : 1 : 1,7665$	» $= 93°42'$

(1) Stortenbecker, *Trav. chim. des Pays-Bas*, t. XXVII, 1907, p. 240.

(2) Gossner, *Comm. part.* citée par Groth, *Chem. Krys.*, t. II, p. 584.

(3) Le Bel, *Comptes rendus*, t. 153, 1911, p. 1081.

Des macles très fréquentes résultent de l'accolement de deux cristaux suivant les plans a^1, o^1 ou p, le premier étant toujours plan de symétrie de l'ensemble. Les angles de ces plans étant peu différents

$$po^1 = 58°43', \quad pa^1 = 61°36', \quad o^1a^1 = 59°41',$$

on s'explique aussi que, parfois, trois cristaux s'associent en groupements imparfaits admettant, pour axe quasi ternaire, les axes binaires de chacun d'eux.

Les propriétés optiques de ces cristaux offrent la plus complète analogie avec celles du sel ammoniacal : les axes optiques sont en effet dans g^1, et la bissectrice aiguë, négative, fait dans l'air, du côté de l'angle obtus ph^1, un angle de 55°,5 avec la normale à p.

Bien que, maintenus en flacon au contact des cristaux tricliniques, ces cristaux monocliniques ne paraissent subir aucune altération à froid, ils n'en doivent pas moins être regardés comme une forme *instable*, en état de *faux équilibre*.

Introduits, en effet, à la température de 12°,5, dans une solution saturée par rapport au sel triclinique, ils se dissolvent en moins de 20 heures, alors que des cristaux tricliniques témoins placés à côté ne sont nullement modifiés. Il est donc vraisemblable que la formation simultanée des deux espèces de cristaux dans la même solution, n'a pu se faire que grâce à un état de sursaturation favorisé sans doute par la nature complexe du mélange et dû au refroidissement, mais qui n'a pu se maintenir longtemps après la cessation de celui-ci. Effectivement, si la première récolte de cristaux, faite 14 heures après l'abandon à elle-même de la liqueur chaude, a fourni des cristaux monocliniques parfaitement intacts, les suivantes n'ont plus montré cette forme instable.

Sous l'action de la chaleur, ces cristaux se fragmentent par à-coups brusques et se comportent ensuite, à tous égards, comme des cristaux tricliniques. Cette transformation d'une forme instable ne se fait naturellement pas à une température définie et je l'ai vue commencer aussi bien à 40° que vers 150°. Elle paraît toujours terminée à 170°.

Il semble impossible, dès lors, qu'on puisse atteindre, sans transformation, le domaine de stabilité de cette forme monoclinique, ce domaine étant, selon toute probabilité, immédiatement voisin du point de fusion.

ÉCONOMIE RURALE. — *Cas remarquable d'hérédité en mosaïque chez des hybrides d'Orges* (Hordeum distichum nutans *Schüb.* × H. distichum nudum *L.*). Note de M. **L. Blaringhem**, présentée par M. J. Costantin.

Dans un Mémoire, déposé en septembre 1911 et paru récemment [1], j'ai montré la fréquence d'un mode de transmission héréditaire qui se traduit par la juxtaposition sur l'enfant des caractères se correspondant chez les parents. Découvert et signalé en 1859 à l'Académie par Ch. Naudin, ce mode d'hérédité fut depuis beaucoup moins étudié que l'hérédité alternante, appelée encore *hérédité mendélienne*, avec laquelle il a beaucoup de rapports. Je propose de désigner sous le nom d'*hérédité naudinienne* les cas nombreux où l'hybride présente, côte à côte comme s'il s'agissait d'une mosaïque, des caractères, qui, en d'autres circonstances, se recouvrent pour se disjoindre dans les générations suivantes, selon les règles de Mendel.

Les exemples obtenus ou cités par Naudin [2] (*Datura Stramonio-lævis*, *Linaria purpureo-vulgaris*, *Cytisus Adami*, Oranger-Citronnier *Bizarria*) sont très nets; ceux que j'ai décrits ont été découverts par une étude minutieuse de caractères d'Orges cultivées (*Hordeum distichum nutans* β × *H. d. erectum* α et réciproquement, *H. d. nutans* β × *H. tetrastichum pallidum* δ et réciproquement); ils portent sur des caractères, tels que la présence ou l'absence d'épines sur les glumelles dorsales des grains, très stables mais ne pouvant être contrôlés que par des observateurs préparés à cette étude; s'il s'agit de la mosaïque d'épillets hermaphrodites et d'épillets mâles, des indécisions subsistent à cause de l'avortement fréquent des organes et éléments sexuels des hybrides. J'ai découvert en 1908 [3] et étudié depuis avec soin une série d'exemples où la mosaïque est fort apparente et facile à contrôler.

Ces exemples sont relatifs à l'hérédité des caractères :

Grain mûr enveloppé par les glumelles opposé à *grain nu*, couple dont j'ai étudié la disjonction dans les hybridations suivantes :

Hordeum distichum nutans Schüb. × *H. distichum nudum* L.
Hordeum distichum erectum Schüb. × *H. distichum nudum* L.

---

(1) L. Blaringhem, *Sur l'hérédité en mosaïque* (*Rapports de la IVme Conf. intern. de génétique*, tenue à Paris, 18-23 septembre 1911; Paris, Masson, 1913, p. 101-131 et 19 figures).

(2) Ch. Naudin, *Nouvelles recherches sur l'hybridité des végétaux* (*Nouvelles Archives du Muséum*, t. I, 1865, p. 1-176 et 5 planches in-4°).

(3) L. Blaringhem, *Recherches sur les hybrides d'Orges* (*Comptes rendus*, t. 146, p. 1295, 15 juin 1908).

Hordeum cœleste trifurcatum × *H. distichum nutans* Schüb.
Hordeum cœleste trifurcatum × *H. Zeocriton* L.
Hordeum cœleste trifurcatum × *H. Steudelii* Körnicke

et leurs réciproques. Ces hybridations ont été en partie déjà réalisées par Rimpau (1891), par Biffen (1907) et contrôlées par Tschermak (1910); leurs descendances ont été décrites sans être interprétées (Rimpau), ou rattachées à la disjonction mendélienne (Biffen, Tschermak) en notant cependant des irrégularités. Ces irrégularités dans la disjonction m'ont toujours paru caractéristiques des phénomènes d'hérédité naudinienne.

Pour en donner une idée, il me suffira d'exposer ici le cas déjà décrit [1] à propos des singularités de la disjonction de la présence ou absence d'épines sur les grains, accompagnées de l'apparition de la fragilité de l'épi (hybridmutation). En juillet 1906, *H. distichum nutans* α (0,102) × *H. d. nudum* (Orge nue Johner) a donné trois grains hybrides dont j'ai obtenu deux plantes très vigoureuses (première génération) :

	Épis donnant..	Grains.	Enveloppés.	Demi-nus.	Nus.
A	6	188	172	16	0
B	8	185	92	57	36

la mosaïque était uniformément répartie sur les divers épis, beaucoup moins marquée sur A que sur B; mais ces différences s'atténuèrent notablement dans les générations suivantes (jusqu'à la quatrième).

Toutes les plantes dérivées de grains nus, de quelque génération que ce fût, n'ont donné ultérieurement que des grains nus; ce retour définitif nous autorise à regarder le caractère grain nu comme récessif par rapport au grain enveloppé. Les grains deminus (adhérence de la glumelle interne, non adhérence de la glumelle externe), de même que les grains enveloppés, sont encore pour la plupart hétérozygotes, et, s'il y a des retours à des types purs, ils sont de beaucoup plus rares que les retours aux grains nus; car, dans l'exemple particulier étudié ici, je n'ai trouvé encore aucune lignée ne donnant que des grains enveloppés.

En F_2, j'ai suivi les lots suivants qui ont donné :

	Semé.	Nombre de plantes.	Plantes à grains nus.	enveloppés.	en mosaïque.
(A)	16 demi-nus.....	12	2	3	7
(A)	60 enveloppés . .	53	11	22	20
(B)	57 demi-nus	45	18	5	22
(B)	60 enveloppés. . .	49	19	13	17

[1] *Comptes rendus*, t. 146, 1908, p. 1294.

En F_3, certaines lignées, manifestement hétérozygotes, se comportent comme les précédentes; d'autres, provenant de grains tous enveloppés, offrent une plus grande uniformité, mais quelques grains nus et demi-nus réapparaissent dans tous les cas examinés (42 lignées à grains enveloppés).

Dans l'une d'elles, récessive au point de vue des dents sur les nervures dorsales, à épis non fragiles, à compacité moyenne ($d = 30$) fixée, j'ai étudié de la récolte de cette année (1912) 100 épis au point de vue de la mosaïque des grains nus et des grains enveloppés : 18 de ceux-ci ayant le même nombre d'épillets (26) sont comparables entre eux et ont montré :

Grains nus et demi-nus	0	1	2	3	4	5
Nombre d'épis (18)	2	3	4	3	3	3

répartis sur les épillets comptés à partir de la base du rachis :

Épillets...	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14	15-16	17-18	19-20	21-22	23-24	25-26
(Avortés)	3	2	4	5	7	4	5	2	5	3	4	3	

Il n'y a pas de disjonction par plages dans ce cas extrême; la mosaïque est répartie d'une manière uniforme sur les divers épis de la lignée.

Biffen (1907) et Tschermak (1910) admettent que les caractères grains enveloppés et grains nus de l'Orge constituent, en quelques cas, un couple mendélien se dissociant dans le rapport 3 : 1; dans tous les exemples que j'ai étudiés depuis 1906, j'ai constaté au contraire des irrégularités, soit sur les plantes hybrides qui montrent la mosaïque, soit dans les pourcentages de la descendance disjointe. Il est vrai que j'ai croisé à dessein, non pas de simples variétés d'une même espèce, mais des espèces élémentaires nettement distinctes, dont plusieurs reconnues par Linné, et j'ai montré déjà que l'*hérédité naudinienne* ou *en mosaïque* régit surtout, ou même seulement, les disjonctions d'hybrides réalisés entre espèces différentes.

BACTÉRIOLOGIE. — *Recherches sur la flore intestinale. Sur la production possible de ptomaïnes en milieu acide.* Note de MM. **Albert Berthelot** et **D.-M. Bertrand**, présentée par M. Roux.

Lorsque nous avons isolé pour la première fois le *Bacillus aminophilus intestinalis* (¹) nous avons noté que la persistance des troubles intestinaux,

(¹) Albert Berthelot et D.-M. Bertrand, *Comptes rendus* t. 154, 10 juin 1912, p. 1643 et 24 juin 1912, p. 1826.

chez le malade dont nous avions employé les matières fécales, coïncidait avec une réaction acide de celles-ci. Peu de temps après nous avons retrouvé le même microbe chez un malade présentant également cette constance des symptômes d'entéro-colite et de l'acidité des fèces; depuis lors nous avons à diverses reprises fait la même observation.

D'autre part nous avons établi que le *B. aminophilus*, microbe acidaminolytique et saccharolytique est capable de produire, suivant la nature des aliments mis à sa disposition, soit des ptomaïnes, soit une assez forte proportion d'acides. La constatation d'une telle activité chimique et d'une réelle prépondérance dans la flore intestinale de sujets atteints de troubles intestinaux particulièrement rebelles nous a conduits à étudier de plus près le rôle probable de ce microbe dans l'étiologie des états pathologiques que nous avions observés.

Mais, du fait même que nous avions affaire à une bactérie attaquant aussi énergiquement les sucres que les amino-acides, la question se présentait très complexe; en effet, il semblait *a priori* bien probable que, mis en présence des deux sortes d'aliments à la fois, le *B. aminophilus* devait avoir sa production de substances toxiques entravée par l'acide lactique formé dans le milieu. Nous avons vérifié qu'il en est bien ainsi et lorsqu'on ensemence ce microbe dans un milieu convenable renfermant du glucose et de l'histidine, il fonctionne comme ferment lactique et ne donne pas d'imidazoléthylamine.

Si l'on s'en tenait à une expérience ainsi conduite on pourrait conclure à l'innocuité du *B. aminophilus* et même à son rôle favorable dans l'intestin; mais en réalité il doit en être tout autrement car, ainsi que nous allons le montrer, ce microbe est capable de donner naissance à des ptomaïnes dans des conditions où d'autres bactéries acidaminolytiques seraient incapables d'en produire.

Pour cette nouvelle expérience nous avons employé notre milieu synthéthique habituel à base d'histidine, additionné ou non de peptone de soie ou de peptone tryptique de viande, mais au lieu d'y ajouter du glucose nous y avons introduit des doses d'acide lactique variant entre 0,5 et 5 pour 1000. Dans un premier essai nous avons ensemencé ce milieu avec des traces de *B. aminophilus*, en même temps que des témoins neutres avec et sans glucose; nous avons examiné nos cultures après 24 heures à 37° et nous avons obtenu les résultats suivants :

1. Milieu neutre, culture abondante, formation d'imidazoléthylamine;
2. Milieu neutre glucosé, culture abondante, formation d'imidazoléthylamine;

3. Milieux acides à 1 et 2 pour 1000, culture assez abondante, formation d'imidazoléthylamine mais en moindre quantité qu'en 1 et 2;

4. Milieu acide à 3 pour 1000, développement microbien faible, traces d'imidazoléthylamine ;

5. Milieux acides à 4 et 5 pour 1000, développement microbien insignifiant, pas d'imidazoléthylamine.

La production de petites quantités d'imidazoléthylamine en l'absence d'hydrates de carbone et en présence d'acide lactique préformé était donc manifestement possible; mais nous n'avons pas voulu nous contenter de cette expérience et nous avons tenu à nous rapprocher autant que possible des conditions qui se trouvent souvent réalisées dans le tube digestif. Pour cela nous avons cultivé le *B. aminophilus*, en boîtes de Roux, sur gélose polyaminée, ne renfermant pas d'histidine et nous avons ensemencé le même volume de milieu, identiques à ceux que nous avons précédemment utilisés, avec la même quantité de corps microbiens : le dixième d'une culture en boîte de Roux pour 20$^{cm^3}$ de milieu ; bien entendu, nous nous étions préalablement assurés que notre mode d'ensemencement ne diminuait pas le taux d'acidité de nos milieux lactiques. Nous avons alors observé que, même au bout de 18 heures, sous l'influence du grand nombre de corps microbiens, la ptomaïne formée était aussi abondante dans le milieu contenant 3 pour 1000 d'acide que dans le milieu neutre.

Ce résultat tire un intérêt tout spécial du fait que, dans l'intestin, le cas doit fréquemment se présenter d'une grande masse de *B. aminophilus* agissant sur de l'histidine contenue dans des produits de digestion rendus faiblement acides par d'autres microbes formant de l'acide lactique, mais n'attaquant pas les acides aminés.

A côté de leur intérêt pathogénique les faits que nous venons de rapporter présentent une certaine importance au point de vue médico-légal. En effet, il y a quelques mois, au sujet d'une intoxication alimentaire suivie de mort, on nous a demandé si l'on pouvait affirmer que la formation de ptomaïnes était impossible dans des matières vomies présentant une faible acidité. Nos recherches étant alors trop peu avancées nous avions répondu que rien ne permettait d'émettre sur ce sujet une opinion formelle et que par conséquent l'accusé devait bénéficier du doute. Maintenant il n'en serait plus de même et les experts devront toujours se souvenir que, dans certaines conditions, dont on ne saurait rejeter *a priori* la possibilité, des ptomaïnes très toxiques peuvent prendre naissance dans un milieu légèrement acide.

En résumé, dans la flore intestinale de sujets présentant à la fois des

symptômes d'entérite ou de colite muqueuse et une réaction acide de leurs matières fécales, on trouve assez fréquemment un microbe, le *B. aminophilus intestinalis*, qui est capable de décarboxyler l'histidine même dans un milieu légèrement acide (3 pour 1000 d'acide lactique). Autant qu'il est possible de conclure d'expériences *in vitro*, cette bactérie, qu'un examen sommaire pourrait faire confondre avec le *Pneumobacille* ou avec sa variété le *B. lactis aerogenes*, peut très bien se comporter dans l'intestin comme un simple ferment lactique et ne pas former de base toxique aux dépens de l'histidine qui s'y trouve; mais, dans certains cas, elle peut parfaitement produire de l'imidazoléthylamine, aussi bien en milieu neutre ou alcalin, qu'en présence d'acides élaborés par d'autres microbes. Ainsi que nous l'avons établi l'action décarboxylante du *B. aminophilus* n'est pas limitée à l'histidine; les résultats que nous venons d'exposer doivent donc vraisemblablement s'appliquer aux divers acides aminés, qui peuvent exister dans le contenu intestinal, et aux ptomaïnes qui en dérivent.

GÉOLOGIE. — *Les calcaires à* Productus *de l'Indo-Chine*. Note de M. **Mansuy**, présentée par M. H. Douvillé.

Les calcaires ouraliens à *Schwagerina princeps* Ehr., découverts au Cammon, Laos, par M. Dussault, puis sur la feuille de Van-Yen, Tonkin, par M. Deprat, ont donné une riche faune de Brachiopodes, composée principalement d'espèces de l'Ouralien de l'Oural et du Timan, décrites par Tschernyschew [1]. Sur 96 espèces recueillies, 61 appartiennent au Carboniférien supérieur de l'Oural et du Timan.

L'horizon inférieur de l'Oural, à *Omphalotrochus Whitneyi* Meek, ne paraît pas représenté; un seul individu, rapporté avec doute à *Spirifer Marcoui* Waag., est spécial à cet horizon. Cinq espèces sont caractéristiques de l'horizon à *P. Cora*: *Meekella striatocostata* Cox., *M. eximia* Eich., *Productus boliviensis* d'Orb., *P. Konincki* de Vern., *Marginifera involuta* Tsch. Les nombreuses espèces de l'horizon supérieur à *Sch. princeps*, de l'Oural, sont les suivantes : *Dielasma juresanensis* Tsch., *Hemiptychina orientalis* Tsch., *Notothyris nucleolus* Kut., *Pugnax osagensis* Shum., *Uncinulus Wangenheimi* Pand., *Camarophoria crumena* Mart., *C. mutabilis* Tsch., *Athyris Gerardi* Dien., *Spiriferina Holzapfeli* Tsch., *Sp. laminosa* M'Coy, mut. *sterlitamakensis* Tsch., *Spiriferella artiensis* Tsch., *Spirifer striatus* Sow., *Sp.*

(1) Tschernyschew, *Die obercarbonischen Brachiopoden des Ural und des Timan* (*Mém. Com. géol.*, t. V, p. 16).

cameratus Mort., *Sp. fasciger* Keys., *Sp. tastubensis* Tsch., *Sp. Dieneri* Tsch., *Sp. lyra* Kut., *Sp. tibetanus* Dien., *Sp. interplicatus* Roth., *Sp. Fritschi* Schell., *Sp. Nikitini* Tsch., *Sp. rectangulus* Kut., *Sp. uralicus* Tsch., *Sp. ufensis* Tsch., *Sp. Sokolovi* Tsch., *Sp. quadriradiatus* de Vern., *Martiniopsis uralica* Tsch., *M. orientalis* Tsch., *M. baschkirica* Tsch., *Martinia triquetra* Gemm., *Reticularia lineata* Mart., *R. rostrata* Kut., *Ambocœlia planoconvexa* Shum., *A.* cf. *Urii* Flem., *Schizoporia supracarbonica* Tsch., *Chonetes variolata* d'Orb., *Productus Gruenwaldti* Krot., *P. tranversalis* Tsch., *P. inflatus* M'Chesney, *P. tartaricus* Tsch., *P. curvirostris* Schell., *P. pustulatus* Keys., *P. juresanensis* Tsch., *P. Cora* d'Orb., *P. lineatus* Waag., *P. tenuistriatus* de Vern., *P. cancriniformis* Tsch., *P. pseudomedusa* Tsch., *P. punctatus* Mart., *P. Iacovlevi* Tsch , *P. porrectus* Kut., *P. timanicus* Stuck., *Proboscidella Kutorgæ* Tsch. Parmi ces espèces, deux sont communes à l'horizon à *P. cora* et à l'horizon à Schwagérines : *Spirifer cameratus* et *Productus porrectus;* trois sont rencontrées dans les trois horizons des calcaires ouraliens : *Productus Gruenwaldti, P. juresanensis* et *P. Cora;* une, enfin, provient, dans l'Oural, des horizons inférieur et supérieur : *Productus inflatus.*

De l'Ouralien de Lo-Ping, Kouang-Si, les calcaires du Cammon et du Tonkin ont donné deux espèces : *Productus Cora,* espèce à diffusion extrême et *P. plicatilis* Sow. Du Kan-Sou : *Dielasma vesicularis* David., *Pr. lineatus, Pr. punctatus* et *Pr. elegans* M'Coy. Les affinités de l'Ouralien du Turkestan sont révélées par la présence, dans l'Ouralien indo-chinois, de : *Notothyris nucleolus, Spirifer lyra, Reticularia lineata, Schizoporia supracarbonica, Productus inflatus, P. lineatus.* Quelques formes de l'Ouralien du Cammon et de l'Oural persistent dans le Permien himalayen, (Spiti, Chitichun); ce sont : *Athyris Gerardi, Spirifer fasciger, Sp. musakheylensis, Sp. Marcoui, Sp. tibetanus, Reticularia lineata, Productus Cora, P. lineatus, P. cancriniformis* et *P. mongolicus.* Les espèces communes à l'Indo-Chine et au Salt-Range sont en petit nombre. Du calcaire à *Productus* inférieur : *Spirifer striatus* et *Reticularia lineata;* des calcaires à *Productus* inférieur et moyen : *S. Marcoui;* des calcaires à *Productus* inférieur, moyen et supérieur : *Sp. musakheylensis, Pr. Cora, P. lineatus.*

Au Cammon, *Productus gratiosus* Waag., des calcaires moyen et supérieur de la Salt-Range et du Permien de Chitichun, provient d'un niveau plus élevé que l'horizon à *Sch. princeps;* c'est peut-être ce niveau qui renferme *Sumatrina Annæ,* reconnu pnr M. Deprat dans les calcaires du Cammon. Nous retrouvons en Indochine quelques espèces de l'Ouralien du Kachmir (Zewan and Barus beds), la plupart à grande extension verticale et peu caractéristiques : *Spirifer musakheylensis, Productus pustulatus, P. spinulosus, P. Cora, P. mongolicus, P. punctatus.* Du Permien du Spitzberg, les calcaires du Cammon et du Tonkin ont donné : *Spirifer cameratus, Pr. boliviensis, P. timanicus.* Nous signalerons ensuite treize Brachiopodes des calcaires à *Schw. princeps* et des calcaires à *Sumatrina Annæ* indo-chinois, faisant partie des faunes du Permo-Carbonifère du Trogkofel et des Alpes carniques : *Spirifer fasciger, Sp. tibetanus, Sp. Fritschi, Sp. trigonalis, Sp. quadriradiatus, Reticularia lineata, R. rostrata, Productus elegans, P. gratiosus, P. spinulosus, P. curvirostris, P. Cora, P. lineatus, P. cancriniformis, P. punctatus.* Nous citerons, d'autre part, deux espèces du Permien de Timor : *Camarophoria crumena* et *Spirifer interpli-*

catus, type de l'espèce et non de la race de l'Ouralien à Schwagérines de l'Oural; il convient d'ajouter *Uncinulus Wangenheimi* Pand., qui ne peut être séparé, croyons-nous, de *U. timorensis* Beyr. et de *U. Theobaldi* Waag. du Salt-Range.

Au Cambodge, M. Lantenois a recueilli : *Sumatrina multiseptata* Dep., *Steinmannia gemina* Waag., *Romingeria* n. sp., *Lophophyllum* sp.? *Lonsdaleia* n. sp., *Productus gratiosus*, *Spirifer Fritschi*, *Reticularia indica*, *Camarophoria* n. sp., *Meekella* cf. *evanescens* Schell.

L'examen des listes comparatives qui précèdent démontre que les faunes de Brachiopodes du Permo-Carbonifère indo-chinois sont, dans l'ensemble, celles de l'Ouralien de l'Oural et du Timan, avec lesquelles elles présentent des affinités beaucoup plus marquées et plus générales qu'avec celles du Permo-Carbonifère de l'Himalaya et du Salt-Range; ces affinités sont d'ailleurs confirmées par la comparaison des Fusulinidés des deux régions, ainsi que l'a établi M. Deprat. La présence de *Sumatrina multiseptata* Deprat [1], espèce plus récente que *S. Annæ* Volz, dans certains horizons des calcaires du Cambodge, indique, pour ces niveaux, un âge permien supérieur peu différent de celui des grauwackes de Luang-Prabang, à *Sum. Annæ*.

Au point de vue paléogéographique, les calcaires ouraliens indo-chinois se relient à l'Ouralien des monts Oural et Timan : par l'Ouralien de la baie d'Oussouri, dont la faune, étudiée par Iwanof, est composée d'espèces du Salt-Range et d'espèces de l'Oural, ces dernières en nombre prédominant : *Hemiptychina inflata*, *Notothyris nucleolus*, *Camarophoria Margaritovi*, *C. Purdoni*, *Rhynchophora Nikitini*, *Hustedia remota*, *H. indica*, *Spiriferina cristata*, *Spiriferella Keilhavi*, *Spirifer fasciger*, *Sp. alatus*, *Reticularia lineata*, *Productus Purdoni*, *P. irginæ*, *P. asperulus*, *P. Wallacei*, *P. Weyprechti*, *Marginifera typica*, *M. ovalis*, — puis par les gisements du même âge découverts au Kuen-Lun et au Turkestan (Tongitar, Kuturkuk), dans lesquels on retrouve également la faune de l'Ouralien russe. C'est donc surtout par la Téthys septentrionale qu'ont eu lieu les migrations eurasiatiques à cette époque géologique.

GÉOLOGIE. — *Efficacité des puits absorbants.*
Note de M. **Gustave F. Dollfus**, présentée par M. H. Douvillé.

Les expériences entreprises par le Conseil municipal de Paris pour l'absorption des eaux par puits, afin de parer aux inondations dans la vallée de la Seine, ne nous paraissent pas probantes; elles nous semblent même démontrer qu'il n'y a rien à attendre de cette méthode.

---

[1] J. Deprat, *Étude des Fusulinidés de Chine et d'Indo-Chine et class. des calcaires à Fusulines* (*Mém. Serv. géol. de l'Indo-Chine*, t. I, fasc. 3, p. 53).

Dans ces essais, on ne s'est pas occupé de ce que devenaient les eaux une fois absorbées, ni de leur parcours ultérieur souterrain, ni de leur aboutissement final. En réalité aucune eau n'a été perdue, aucune eau n'a quitté le bassin de la Seine; on a déplacé localement les conduites ordinaires de jonction au fleuve et pour en raccourcir le trajet, sans modification au drainage général. Les forages, en effet, ont donné un passage plus rapide aux eaux supérieures pour les diriger, sans détours, à la nappe générale de fond en équilibre avec le fleuve coulant à découvert. Par ce moyen, en amenant plus d'eau en moins de temps au même passage, on précipite l'inondation au lieu de l'espacer.

Examinons rapidement chacun des exemples donnés.

Romainville. — Un forage de 66ᵐ a fait descendre directement les eaux de l'argile verte jusqu'à la nappe du calcaire de Saint-Ouen, vers 44ᵐ d'altitude, mais on n'a rien enlevé par ce fait à la Seine; nous connaissons, en effet, la nappe du calcaire de Saint-Ouen, elle est en pente rapide sur Saint-Denis, elle est à 40ᵐ à Pantin, à 30ᵐ à Aubervilliers, à 25ᵐ à Saint-Denis, où elle va rejoindre la Seine; en cas de hausse de la Seine, les eaux de la nappe du calcaire de Saint-Ouen s'épanchent mal en Seine et Saint-Denis est submergé; au lieu d'un lent ruissellement naturel des eaux de la nappe de l'argile verte à Romainville, on a brusquement précipité ces eaux en pression donnant une chasse rapide à la nappe de Saint-Ouen; pour assécher Romainville, on va noyer Saint-Denis.

Ferme des Saulniers, commune de Vimory, près Montargis. — On a facilement asséché les terrains de cette ferme par un puits de 14ᵐ de profondeur, mais rien n'a été perdu ou retardé pour le bassin du Loing. Les eaux se sont engouffrées dans un îlot de calcaire de Beauce, mais elles se sont arrêtées sur une couche d'argile à silex imperméable qui revient au jour à quelques kilomètres en aval, et là, à Gué-Perreux, les eaux du fond sont revenues fournir leur contingent au Sorlin. sans avoir à vaincre les mêmes difficultés qu'en surface.

Pierre-Levée, près Coulommiers. — J'ai dressé autrefois la Carte géologique de cette région, le puits et le forage ont conduit les eaux de l'argile verte et du Loupillon directement à 52ᵐ de profondeur dans un niveau statique argileux, dépendant du calcaire de Saint-Ouen, mais niveau fort au-dessus encore du cours du Morin; rien n'a été enlevé à cette rivière, les sources de Pont-Moulin, à 90ᵐ d'altitude, grossies plus rapidement, ont plus vivement aussi regagné le grand Morin qui coule à la cote 75.

Il y aurait à retenir du projet l'idée de M. Dienert qui consiste à mettre des vannes à l'issue des drains qui entraînent les eaux des terrains argileux, de manière à pouvoir les laisser plus longtemps inondés, à ralentir ainsi leur égouttement, pour donner du temps pour l'évacuation des eaux générales en aval. Mais cette action ne peut s'exercer que sur une surface très faible,

elle ne peut se faire qu'au détriment du cultivateur qui a draîné spécialement pour se débarrasser des eaux, et non pour les conserver. C'est une proposition en opposition directe à la méthode des puits absorbants, qui est par elle-même favorable au groupement des eaux.

Nous ne sommes maîtres ni de la quantité d'eau qui tombe, ni du point d'équilibre final des eaux, qui est la mer; nous ne pouvons agir sur elles qu'entre le point de chute et celui de déversement ultime; cette action peut s'exercer de deux manières : nous pouvons ralentir ou précipiter le débit. Pour ralentir les eaux, on fera des barrages, des écluses, des serrements, des plantations, des labours; pour précipiter la marche des eaux, on fera des fossés, des drains, des canaux, des égouts, des puits, des pavages, etc.

Les tentatives qui ont été faites sont en contradiction directe avec le résultat cherché; la géologie nous enseigne que le cours de la Seine est toujours le chemin de moindre résistance pour l'écoulement des eaux de son bassin vers la mer.

A 4 heures, l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 5 heures.

G. D.